2. Matriks

2.0 Pengiraan Matriks
2.1 Operasi Asas
2.2 Penyelesaian Matriks

- Tugasan 5

2.0 Pengiraan Matriks

2.0.0 Kerelevanan

Analisis fizik dimudahkan dengan dibuat andaian dan/atau anggaran tertentu. Ini membolehkan proses-proses fizik diperihalkan oleh sistem linear persamaan-persamaan.

Sebagai contoh, spektrum getaran suatu molekul dengan n darjah kebebasan getaran boleh diperihalkan oleh tenaga keupayaan

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_n) \cong \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{n} A_{jk} q_j q_k$$

di mana q_j adalah kordinat teritlak bagi sistem tersebut, dan A_{jk} adalah parameter keupayaan. Tenaga kinetik biasanya berbentuk

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \cong \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{n} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

di mana $\dot{q}_j$ adalah halaju teritlak, dan M_{jk} matriks jisim teritlak. Pergerakan sistem diberi persamaan Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

di mana Lagrangean

$$\mathcal{L} = T - U$$

Maka

$$\sum_{j}^{n} \left(A_{jk} q_j + M_{jk} \ddot{q}_j\right) = 0$$

(k = 1, 2, …, n persamaan). Kalau diandaikan kordinat teritlak mengayun dengan frekuensi ω,

$$q_j = x_j e^{i\omega t}$$

kita perolehi

$$\sum_{j=1}^{n} \left(A_{jk} - M_{jk}\omega^2\right) x_j = 0.$$

Ini merupakan set persamaan linear homogen. Dalam bentuk matriks,

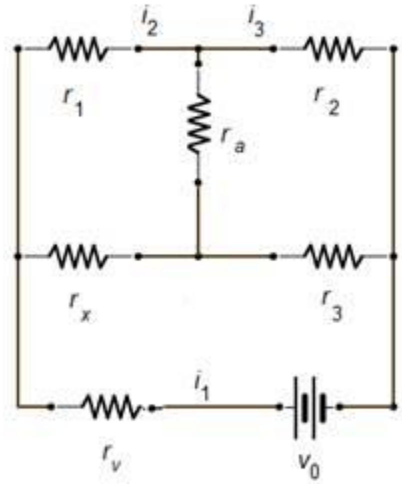
$$(\mathbf{A} - \mathbf{M}\omega^2)\mathbf{x} = 0.$$

Untuk penyelesaian tak remeh, determinan

$$|\mathbf{A} - \mathbf{M}\omega^2| = 0$$

Persamaan ini diselesaikan untuk memperolehi ω.

Bagi satu lagi contoh, pertimbangkan rangkaian litar elektrik. Ini diperintah oleh Hukum Kirchoff. Misalnya, litar



diperihalkan oleh persamaan-persamaan berikut:

$$r_v i_1 + r_1 i_2 + r_2 i_3 = v_0$$
$$-r_x i_1 + (r_1 + r_x + r_a)\, i_2 - r_a i_3 = 0$$
$$-r_3 i_1 - r_a i_2 + (r_2 + r_3 - r_a) i_3 = 0$$

Dalam bentuk matriks, ini boleh ditulis

$$\mathbf{Ri} = \mathbf{v},$$

dengan penyelesaian

$$\mathbf{i} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}$$

Contoh seterusnya ialah persamaan perbezaan, yang boleh ditulis dalam bentuk matriks. Dalam kes ini, songsangkan matriks berkenaan untuk perolehi penyelesaian.

Penggunaan matriks boleh juga menyelesaikan masalah mencari punca dan ekstremum fungsi multipembolehubah. Misalnya, untu mencari punca, dikehendaki mencari **x** di mana **f**(**x**) = **0**. Kembangan siri Taylor memberikan:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{x}\cdot\nabla\mathbf{f}(\mathbf{x}) + O(\Delta\mathbf{x}^2) \cong \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \cong 0$$

di mana

$$\Delta\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$$

dan

$$A_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

Ini boleh sahaja ditangani menggunakan kaedah Newton multipemboleubah atau kaedah sekan multipembolehubah. Sebagai alteranatif, ia boelh dilihat sebagai persamaan matriks dan diselesaikan sebegitu. Bagi kes mencari ekstremum, ia boleh dilihat sebagai masalah mencari **x** di mana $g(\mathbf{x})$ minimum/maksimum, atau di mana $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

.

2.1 Operasi Asas Matriks

2.1.0 Operasi dasar

Suatu matriks punyai banyak unsur yang boleh diatur dalam baris dan lajur. Unsur-unsur ini, untuk suatu matriks **A** yang bersaiz $m \times n$ ditulis,

$$A_{ij} \qquad i=1, \ldots, m \quad j=1, \ldots, n$$

dengan i mengindeks baris, dan j mengindeks lajur.

Transposisi matriks itu, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, diberikan,

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji},$$

sementara surihnya, ialah hasiltambah unsur-unsur pepenjuru,

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} A_{ii}.$$

Dua matriks berdimensi sama boleh dihasiltambah untuk memberi matriks berdimensi serupa,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$C_{jk} = A_{jk} + B_{jk}$$

Pendaraban dua matriks, $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, didefinisikan

$$C_{jk} = \Sigma_i A_{ji} B_{ik}$$

dan oleh itu hanya boleh berlaku apabila bilangan lajur **A** sama dengan bilangan baris **B**, dan ia memberikan matriks hasildarab yang bilangan barisnya sama dengan bilangan baris **A** dan bilangan lajurnya sama dengan bilangan baris **B**. Maka perhatikan bahawa pendaraban matriks tidak kalis tertib,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

secara am.

2.1.1 Determinan dan songsangan

Songsangan kepada matriks **A** memuaskan

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

di mana matriks unit atau matriks identiti mempunyai unsur-unsur

$$I_{ij} = \delta_{ij}$$

Pengiraan songsangan membabitkan determinan matriks berkenaan. Determinan dikira seperti berikut,

$$\det \mathbf{A} \equiv |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} |\mathbf{R}_{ij}| \equiv \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} M_{ij} \equiv \sum_{i=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$$

bagi mana-mana $j = 1, \ldots, n$, di mana $\mathbf{R}_{ij}$ adalah matriks sisa daripada **A** dengan baris ke-i dan lajur ke-j dibuang, M_{ij} minor kepada **A**, dan C_{ij} kofaktor. bagi A_{ij}.

Dengan itu, determinan matriks 1x1 merupakan unsur matriks itu sendiri.

Juga boleh ditunjukkan bahawa determinan matriks tigasegi (atas atau bawah) atau tiga pepenjuru – matriks yang punyai unsur-unsur di bawah atau di atas pepenjuru, semua bernilai 0 – adalah hasildarab unsur pepenjuru. Diambil baris teratas, determinannya ialah unsur teratas pepenjuru darab derminan matriks sisa, yang juga berbentuk tigasegi dan dengan itu memberi nilai dterminan dengan cara yang serupa.

Tukarganti mana-mana 2 baris atau mana-mana 2 lajur dalam sesuatu matriks menyebabkan determinannya berubah tanda (tanda berubah bagi determinan matriks sisa 2x2 terakhir yang terdiri daripada 2 baris atau 2 lajur ini, kerana tukarganti aturan). Dengan itu juga, matriks yang mempunyai 2 baris atau 2 lajur lajur serupa, berdeterminan 0.

Tambahan baris atau lajur yang berkadaran dengan baris atau lajur yang sudah ada, tidak mengubah nilai determinan. Misalnya, ditambah λ kali baris k kepada baris i,

$$A'_{ij} = A_{ij} + \lambda A_{kj}$$

tidak mengubah determinan,

$$\det \mathbf{A'} = \det \mathbf{A}.$$

Ini boleh difahamkan bila dikira determinan menggunakan baris i sebagai baris utama:

$$\det \mathbf{A'} = \det \mathbf{A} + \lambda \det \mathbf{A}_{k\to i}$$

di mana $\mathbf{A}_{k\to i}$ ialah matriks $\mathbf{A}$ dengan baris i diganti baris k. Dan, oleh kerana $\mathbf{A}_{k\to i}$ mempunyai baris berulang, $\det \mathbf{A}_{k\to i} = 0$. Matriks dengan tambahan baris/lajur sebegini boleh ditulis dalam bentuk hasildarab matriks, $\mathbf{A'} = \mathbf{MA}$, dengan $\forall i$: $M_{ii}=1$; $M_{ik} = \lambda$; $M_{il} = 0$, $l \neq i, k$.

Hubungan-hubungan di antara determian termasuk yang berikut:

$$\det (\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

$$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{A}$$

$$\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}.$$

Songsangan suatu matriks $\mathbf{A}$ adalah

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj}(\mathbf{A})$$

di mana matriks dampingan, adj $\mathbf{A}$ = transposisi matriks kofaktor $\mathbf{A}$,

$$(\operatorname{adj} \mathbf{A})_{ij} = C_{ji}.$$

Boleh ditunjukkan bahawa bentu songsangan ini memuaskan kehendak bagi songsangan dalam persamaan-persamaan di atas.

2.1.2 Persamaan nilai eigen

Persamaan nilai eigen berbentuk,

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

di mana $\mathbf{A}$ adalah suatu matriks segiempat sama $m\times m$, $\mathbf{x}$ vektor eigen $m\times 1$, dan λ nilai eigen tertentu bagi $\mathbf{x}$. Ini boleh ditulis,

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1})\mathbf{x} = 0$$

dan ia punyai penyelsaian tak remeh hanya jika

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0.$$

Penyelesaian persamaan ini memberikan nilai-nilai λ, yang kemudiannya digunakan dalam persamaan asal untuk mendapatkan $\mathbf{x}$. Penyelesaian persamaan-persamaan matriks ini boleh gunakan songsangan.

Transformasi keserupaan,

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

memberikan matriks serupa **B** dalam asas lain berkait **S**. Boleh dipuashatikan bahawa **B** punyai nilai-nilai eigen sama,

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$$

dengan $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$. Juga,

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = \prod_i^m \lambda_i$$

iaitu hasildarab nilai-nilai eigen.

2.2 Operasi Asas Matriks

2.2.0 Pertimbangan am

Persamaan matriks memerihalkan sistem linear:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Penyelesaian persamaan ini membabitkan songsangan matriks,seperti di atas,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj}(\mathbf{A}),$$

yang memberikan $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, dengan syarat **A** boleh disongsangkan,iaitu det $\mathbf{A} \neq 0$.

Ini selari dengan hukum Cramer bagi penyelesaian n persamaan linear dalam n pembolehubah, yang diwakili persamaan matriks di atas. Anggap **A** boleh disongsangkan. Biar $\mathbf{N}i$ itu matriks yang diperolehi daripada **A** dengan menggantikan lajur ke-i dengan **b**. Maka penyelesaiannya diberikan oleh,

$$x_i = \frac{|\mathbf{N}_i|}{|\mathbf{A}|}.$$

oleh digunakan.

Penyelesaian membabitkan pengiraan determinan, yang memerlukan ~ $n!$ pengiraan (n saiz matriks) jika dibuat secara tak tersirat, iaitu kekompleksan $O(\exp n)$. Untuk matriks besar, dengan $n >$ ~25, perlu dicari kaedah cepat. Berikut dibincangkan beberapa kaedah yang boleh dipakai.

2.2.1 Penghapusan Gaussan

Persamaan ditransformasikan kepada bentuk yang punyai matriks tigasegi atas (disebut matriks eselon atau matriks Hessenberg). Dengan itu determinan mudah dikira, dan penyelesaian senang dibuat menerusi gantian ke belakang seperti dibincangkan dalam bab sebelum ini.

Transformasi ini dilakukan seperti berikut. Mula-mula, sifarkan unsur-unsur yang dikehendaki. Bermula persamaan asal,

$$\sum_j A_{ij}^{(0)} x_j = b_i$$

Hasiltambah setiap persamaan $i > 1$, dengan $-A_{i1}^{(0)}/A_{11}^{(0)}$ (dengan I ini) darab persamaan untuk i=1. Contoh untuk i=2:

$$(A_{21}^{(0)} x_1 + A_{22}^{(0)} x_2 + A_{23}^{(0)} x_3 + \ldots) + (-A_{21}^{(0)}/A_{11}^{(0)})\,(A_{11}^{(0)} x_1 + A_{12}^{(0)} x_2 + A_{13}^{(0)} x_3 + \ldots)$$
$$= b_2^{(0)} + (-A_{21}^{(0)}/A_{11}^{(0)})\, b_1^{(0)}$$

atau

$$(A_{21}^{(0)} - ((A_{21}^{(0)}/A_{11}^{(0)})\, A_{11}^{(0)}))x_1 + (A_{22}^{(0)} - ((A_{21}^{(0)}/A_{11}^{(0)})\, A_{12}^{(0)}))x_2 +$$
$$(A_{23}^{(0)} - ((A_{21}^{(0)}/A_{11}^{(0)})\, A_{13}^{(0)}))x_3 + \ldots = b_2^{(0)} - (A_{21}^{(0)}/A_{11}^{(0)})b_1^{(0)}$$

dan seterusnya untuk i = 3, 4, … memberikan

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)}.$$

$\mathbf{A}^{(1)}$ kini dengan lajur pertama semua sifar, kecuali untuk baris pertama. Kemudian, hasiltambah setiap $i > 2$ dengan $-A_{i2}^{(1)}/A_{22}^{(1)}$ darab persamaan untuk i=2, memberikan

$$\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}.$$

$\mathbf{A}^{(2)}$ kini dengan lajur kedua juga semua sifar, kecuali untuk baris pertama dan kedua. Begitulah seterusnya, satu per satu lajur dikosongkan, sehingga diperolehi matriks eselon dan

$$\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$$

Penyelesaian didapati bermula daripada baris terakhir – baris n ini hanya punyai satu unsur bukan sifar dalam $\mathbf{A}^{(n)}$ – dengan terus didapati

$$x_n = b_n^{(n)}/A_{nn}^{(n)}.$$

Kemudian x_{n-1} diperolehi daripada baris n-1 menggunakan x_n ini, daripada persamaan yang membabitkan dua unsur $\mathbf{A}^{(n)}$ baris ini yang bukan sifar,

$$A_{n-1,n-1}^{(n)}\, x_n + A_{n-1,n}^{(n)}\, x_n = b_{n-1}^{(n)}$$

dan seterusnya.

Perhatikan bahawa $\mathbf{A}^{(1)}$ diperolehi daripada $\mathbf{A}^{(0)}$ atau $\mathbf{A}$ menerusi tambahan-tambahan baris yang berkadaran dengan baris yang sudah ada, dan seterusnya, jadi

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{(1)} = \ldots$$

2.2.2 Penguraian LU

Dalam kaedah ini, matriks $\mathbf{A}$ diuraikan kepada hasildarab matriks tigasegi bawah (dengan pepenjuru unit) $\mathbf{L}$ dan matriks tigasegi atas $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}.$$

Sebagai contoh, bagi suatu matriks 3×3,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

yakni, $A_{11}=U_{11}$, dan sebagainya. Maka

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}.$$

Kalau $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, kita dapati $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$. Kita selesaikan untuk $\mathbf{y}$, iaitu $y_1 = b_1$, dan sebagainya, dan kemudian kita selesaikan untuk $\mathbf{x}$ menggunakan hasil untuk $\mathbf{y}$, misalnya menggunakan $x_3 = U_{33}y_3$, dan sebagainya.

2.2.3 Kaedah Gauss-Jordan

Ini digunakan dalam masalah songsangan.

Transformasikan $\mathbf{A}$ menjadi matriks unit, menerusi hasiltambah baris, diwakili pendaraban matriks, dan pendaraban baris

$$\mathbf{TA} = (\ldots\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1)\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

iaitu

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}$$

Prosesnya seperti dalam kaedah penghapusan Gaussan, tapi di sini dilakukan juga penghapusan unsur bukan pepenjuru di segitiga atas. Juga pendaraban baris i dilakukan untuk mendapat pepenjuru unit.

Mula-mula, sifarkan lajur pertama kecuali baris pertama dengan menghasiltambah setiap persamaan $i \neq 1$ dengan $-A_{i1}^{(0)}/A_{11}^{(0)}$ darab persamaan untuk i=1. Ini diwakili $\mathbf{T}_1\mathbf{A}$ (= $\mathbf{A}^{(1)}$) di mana $(T_1)_{ii}$ = 1;

$(T_1)_{i1} = -A_{i1}^{(0)}/A_{11}^{(0)}$; $(T_1)_{il} = 0$, $l \neq i,1$. Kemudian unitkan unsur pepenjuru pertama dengan mendarab $1/A^{(1)}_{11}$ kepada persamaan untuk i=1. Ini diwakili

$$\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{A} = \mathbf{T}_2\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}^{(2)}$$

di mana $\mathbf{T}_2$ ialah mana $(T_2)_{11} = 1/A^{(1)}_{11}$, yang lain 0. Kemudian sifarkan lajur kedua kecuali baris kedua dengan menghasiltambah setiap $i \neq 2$ dengan $-A_{i2}^{(2)}/A_{22}^{(2)}$ darab persamaan untuk i=2. Ini diwakili

$$\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{A} = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{T}_3\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}^{(3)}$$

Seterusnya unitkan unsur pepenjuru kedua dengan mendarab persamaan untuk i=2 dengan $1/A^{(3)}_{22}$. Lakukan langkah-langkah ini seterusnya,, sehingga matriks uniter diperolehi.

$\mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{T}$ boleh didapatkan terus dengan melihat **TI**. Sebagai contoh, pertimbangkan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tolak 4 darab baris 1, dari baris 2,

$$\mathbf{TA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{TI} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tolak 2 darab baris 1, dari baris 3,

$$\mathbf{TA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{TI} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tolak (1/3) darab baris 2, dari baris 1,

$$\mathbf{TA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{TI} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Darab -1/6 kepada baris 2,,

$$\mathbf{TA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{TI} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tambah (1/3)×baris 3 kepada baris 1,

$$\mathbf{TA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{TI} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tambah (1/3)×baris 3 kepada baris 2,

$$\mathbf{TA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{TI} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & 1/3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Darab (-1) kepada baris 3,

$$\mathbf{TA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{TI} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Maka songsangan diperolehi.

2.2.3 Kaedah Faddeev-Leverrier

Kaedah ini ialah bagi menyelesaikan masalah nilai eigen, iaitu $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ ataupun $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$. Polinomial cirian bagi matriks **A** ini ialah

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$$

iaitu suatu polynomial dalam λ. Perhatikan bahawa $a_n = 1$ dan $a_0 = (-1)^n$ det **A**. Juga, oleh kerana $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ memberikan nilai-nilai eigen λ_i, maka

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda).$$

Perkenalkan matriks-matriks $\mathbf{S}_k$ yang mana

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda)(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mathbf{S}_{n-k-1}$$

yang kita boleh buat kerana di sebelah kiri ialah matriks polinomial dalam λ tertib n-1. Darab kedua belah dengan $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \mathbf{I} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{k+1} \mathbf{S}_{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mathbf{A}\mathbf{S}_{n-k-1}$$

ataupun

$$a_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^k \mathbf{I} = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \mathbf{S}_{n-k} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k \mathbf{A}\mathbf{S}_{n-k-1} + \mathbf{A}\mathbf{S}_{n-1}\right)$$

Bandingkan pekali-pekali untuk berlainan kuasa λ. Untuk $k = 0$ dan $k = n$ kita perolehi,

$$a_0 \mathbf{I} = - \mathbf{A}\mathbf{S}_{n-1}$$

atau

$$a_0 = \mathbf{A}\mathbf{S}_{n-1}\mathbf{I} = - \text{tr } \mathbf{A}\mathbf{S}_{n-1}$$

dan

$$a_n \mathbf{I} = \mathbf{S}_0$$

sementara yang lain memberikan hubungan rekursi,

$$a_k \mathbf{I} = \mathbf{S}_{n-k} - \mathbf{A}\mathbf{S}_{n-k-1}$$

ataupun

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{A}\mathbf{S}_{m-1} + a_{n-m}\mathbf{I}$$

untuk $m = 1, \ldots, n$. Menerusi penggunaan rumus Jacobi, boleh didapati

$$a_{n-m} = -\frac{1}{m} \text{tr } \mathbf{A}\mathbf{S}_{m-1}.$$

Mula dengan $\mathbf{S}_0 = a_n \mathbf{I} = \mathbf{I}$ dan a_{n-1}, iaitu $m = 1$, untuk dapatkan $\mathbf{S}_1$ dan seterusnya, sehingga $m = n$.

Juga, daripada persamaan memperkenalkan $\mathbf{S}_k$ di atas, dengan meletakkan $\lambda = 0$,

$$\mathbf{A}\mathbf{S}_{n-1} + a_0 \mathbf{I} = 0$$

Dengan itu, songsangan **A**,

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_0} \mathbf{S}_{n-1}$$

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{n-1} = a_2 = -\frac{1}{1} \text{tr } \mathbf{A}\mathbf{S}_0 = -\text{tr } \mathbf{A} = -10$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 3 & 3 & 1\\ 4 & 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 1 & 5\\ 3 & -7 & 1\\ 4 & 6 & -6\end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 26 & -14\\ -8 & -12 & 12\\ 6 & -14 & 2\end{pmatrix} = 4$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 3 & 3 & 1\\ 4 & 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 26 & -14\\ -8 & -12 & 12\\ 6 & -14 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 26 & -14\\ -8 & -8 & 12\\ 6 & -14 & 6\end{pmatrix}$$

$$a_0 = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 3 & 3 & 1\\ 4 & 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 26 & -14\\ -8 & -8 & 12\\ 6 & -14 & 6\end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}40 & 0 & 0\\ 0 & 40 & 0\\ 0 & 0 & 40\end{pmatrix} = -40$$

Lihat bahawa seperti dijangkakan, $\mathbf{S}_3 = \mathbf{A}\mathbf{S}_2 + a_0\mathbf{I} = \mathbf{0}$.

Maka polinomial cirian bagi **A** ialah

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 4\lambda - 40.$$

Determinan **A**,

$$\det \mathbf{A} = (-1)^3 a_0 = 40,$$

sementara songsangan **A** ialah

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_0}\mathbf{S}_2 = \frac{1}{40}\begin{pmatrix}6 & 26 & -14\\ -8 & -8 & 12\\ 6 & -14 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.15 & 0.65 & -0.35\\ -0.20 & -0.20 & 0.30\\ 0.15 & -0.35 & 0.15\end{pmatrix}$$

Daripada $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$, boleh dapatkan nilai eigen menerusi penyelesaian $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$, menggunakan kaedah mencari punca misalnaya.

2.2.4 Lelaran Songsang

Kaedah ini ialah bagi menyelesaikan masalah nilai eigen. Daripada persamaan nilai eigen, perolehi persamaan lelaran (songsang):

$$\mathbf{x}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{N_k}}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{x}^{(k-1)}$$

untuk lelaran ke-k. N_k ialah pemalar pernormalan, supaya $(\mathbf{x}^{(k)})^\mathrm{T}\mathbf{x}^{(k)} = 1$, dan μ ialah tekaan nilai eigen. Jika $\mathbf{x}^{(0)} = \sum_i a_i^{(0)}\mathbf{x}_i$, iaitu kombinasi linear semua vektor eigen, maka

$$\mathbf{x}^{(k)} = \sum_i^n \frac{a_i^{(0)}\mathbf{x}_i}{(\lambda_i - \mu)^k}$$

yang bermakna hanya x_j yang nilai eigennya λ_j paling hampir kepada μ, yang mandiri selepas k yang besar. Dan,

$$\lambda_j = \mu + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N_k}}\frac{x^{(k-1)}{}_l}{x^{(k)}{}_l}$$

di mana i adalah indeks komponen (yang bukan sifar) tertentu.Vektor $\mathbf{x}^{(0)}$ perlu mengandungi komponen x_i. Boleh dicuba beberapa tekaan. Songsangan matriks $(\mathbf{A}-\mu\mathbf{I})^{-1}$.diperlukan. Boleh juga digunakan misalnya Penghapusan Gaussan untuk selesaikan

$$(\sqrt{N_k})(\mathbf{A} - \mu\,\mathbf{I})\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)}$$

pada setiap lelaran.

2.2.5 Matriks tiga pepenjuru

Kaedah ini adalah untuk pencarian nilai eigen. Pertimbangkan matriks **A** yang nyata dan bersimetri ($A_{ij} = A_{ji}$). Kesimetrian ini bermakna **A** punyai nilai eigen nyata dan vektor eigennya boleh dipilih supaya ortonormal. Kalau **A** berbentuk tiga pepenjuru, polinomial ciriannya berbentuk

$$p_n(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & 0 & \dots \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} & \dots \\ 0 & A_{32} & A_{33} - \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Kalau $p_l(\lambda)$ ialah subdeterminan $l \times l$ daripada l baris pertama dan l lajur pertama, maka

$$p_1(\lambda) = A_{11} - \lambda$$
$$p_2(\lambda) = (A_{22} - \lambda)\, p_1(\lambda) - A_{12}^2$$

dan seterusnya

Kita perolehi hubungan rekursi di antara $p_l(\lambda)$,

$$p_i(\lambda) = (A_{ii} - \lambda)\, p_{i-1}(\lambda) - A_{ii-1}^2\, p_{i-2}(\lambda)$$

dan selesaikan untuk λ.

Suatu matriks umum boleh diturunkan ke bentuk tiga pepenjuru untuk membolehkan penggunaan kaedah ini. Kaedah Householder, yang menggunakan cara sama seperti dalam mengubah bentuk kepada matriks eselon dan matriks uniter, boleh digunakan.

2.2.6 Kaedah Lanczos

Kaedah ini juga adalah untuk pencarian nilai eigen. Ia berguna untuk matriks besar, dan jarang (yakni yang punyai banyak unsur bernilai 0).

Pertimbangkan matriks $n \times n$ **A** yang nyata dan bersimetri. Tigapepenjurukan submatriks $m \times m$ daripada **A**:

$$\mathbf{O}^T\mathbf{A}\mathbf{O} = \mathbf{A}'$$

di mana **O** ialah matriks $n \times m$ dengan lajur ke-k diberikan oleh

$$\mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\sqrt{N_k}}$$

bagi $k = 1, \dots, m$, dengan pemalar pernormalan $N_k = \mathbf{u}_k^T\mathbf{u}_k$. Matriks $\mathbf{u}_k$ dijana secara rekursi daripada $\mathbf{u}_1$ sembarangan menerusi

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_k - \alpha_k\mathbf{v}_k - \beta_k\mathbf{v}_{k-1}$$

dengan

$$\beta_k = A'_{k-1k} = \mathbf{v}_{k-1}^T\mathbf{A}\mathbf{v}_k$$

dan

$$\alpha_k = A'_{kk} = \mathbf{v}_k^T\mathbf{A}\mathbf{v}_k$$

bermula dengan $\beta_1 = 0$ dan $\mathbf{u}_1$ rawak. Boleh ditunjukkan bahawa nilai-nilai eigen **A'** adalah penghampiran kepada nilai-nilai eigen terbesar **A**.

2.2.7 Lelaran Kuasa

Kaedah ialah untuk mendapatkan nilai eigen yang terbesar, dan yang terkecil, dengan vektor eigennya.

Kita tulis persamaan nilai eigen sebagai persamaan lelaran:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(p+1)} = l^{(p)}\mathbf{x}^{(p)}.$$

Jika $\mathbf{x}^{(0)}$ sembarangan boleh dikembangkan sebagai kombinasi linear vektor eigen $\mathbf{u}_i$,

$$\mathbf{x}^{(0)} = \sum_i^n \alpha_i \mathbf{u}_i$$

maka kenakan $\mathbf{A}$ ke atas $\mathbf{x}^{(0)}$ P kali,

$$\mathbf{x}^{(P)} = \sum_i^n \alpha_i \boldsymbol{\lambda}_i^{P} \mathbf{u}_i.$$

Ini didominasi oleh nilai eigen terbesar, dan $\mathbf{x}^{(P)}$ didominasi oleh vektor eigen dengan nilai eigen terbesar. Lelaran kuasa ini boleh digunakan untuk memperolehi nilai eigen dan vektor eigen terbesar.

Dan, oleh kerana

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{u},$$

lelaran kuasa untuk $\mathbf{A}^{-1}$ boleh digunakan untuk memperolehi nilai eigen terkecil.

2.2.8 Kaedah BFGS

Kaedah ini ialah bagi mencari ekstremum.

Modifikasi matriks pembezaan separa daripada

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$$

kepada bentuk

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})\mathbf{I}.$$

Untuk penyelesaian, gunakan hubungan lelaran

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - (\mathbf{A}^{(n)})^{-1}\nabla f^{(n)}$$

di mana $\mathbf{A}^{(n)} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(n)})$ dan $f^{(n)} \equiv f(\mathbf{x}^{(n)})$, dengan

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n-1)} + \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}} - \frac{\mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{(n-1)}}{\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{w}}$$

di mana

$$\mathbf{w}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}$$

$$\mathbf{y}^{(n)} = \nabla f^{(n)} - \nabla f^{(n-1)}$$

Isu dengan pencarian ekstremum secara am ialah ekstremum yang ditemui mungkin hanya ekstremum tempatan, iaitu ia merupakan titk ekstremum bagi rantau terhad sekelilingnya, yang tidak semestinya merupakan ekstremum sejagat, iaitu titik ekstremum bagi semua rantau.

Tugasan 5

1. Tulis satu fungsi untuk memulangkan determinan suatu matriks 1×1.
   Tulis satu fungsi untuk mengira determinan suatu matriks 2×2, yang memanggil fungsi pertama ini.
   Tulis satu fungsi untuk mengira determinan suatu matriks 3×3, yang memanggil fungsi ini.
   Tulis satu fungsi rekursi, yang memulangkan determinan suatu matriks empatsegi apa-apa saiz.
   Gunakan fungsi ini untuk menunjukkan, menggunakan matriks 10×10 pilihan, bahawa:
   (i) Determinan matriks tigasegi (atas atau bawah) = hasildarab unsur pepenjuru
   (ii) Tukarganti mana-mana 2 baris atau mana-mana 2 lajur $\Rightarrow$ determinan berubah tanda
   (iii) Matriks dengan mana-mana 2 baris atau mana-mana 2 lajur serupa $\Rightarrow$ determinan 0
   (iv) det (**AB**) = det **A** det **B**
   (v) det $\mathbf{A}^T$ = det **A**
   (vi) det $\mathbf{A}^{-1}$ = 1/det **A**
   (vii) det **A'** = det **A** di mana $A'_{ij} = A_{ij} + \alpha A_{kj}$ ($\forall j$) utk dua baris i dan k, dengan α pemalar.

2. Tuliskan fungsi yang mengira factorial sesuatu integer secara rekursi.
   Plotkan hasil fungsi ini dan nilai suatu fungsi eksponen positif, terhadap integer n.

3. Jana suatu matriks rawak 6×6 **A**.
   Selesaikan $\mathbf{Ax} = l\mathbf{x}$ menggunakan kaedah lelaran songsang dan penghapusan Gaussan.
   Tunjukkan
   $\det \mathbf{A} = \prod_i^m \lambda_i$ iaitu hasildarab nilai-nilai eigen.