

# 3. Persamaan Pembezaan Separa

3.0 Pengiraan PDE

3.1 Persamaan eliptik

3.2 Persamaan parabolaan

3.3 Persamaan hiperbolaan

- Tugas 6

# 3.0 Pengiraan Persamaan Pembezaan Separa

## 3.0.0 Bentuk persamaan

Keadaan fizik di mana kuantiti berubah dalam ruang dan masa ( $>1$  pembolehubah) biasanya diperihalkan oleh persamaan pembezaan separa. Perubahan bebas berlaku terhadap parameter-parameter bebas iaitu masa dan dimensi-dimensi ruang. Misalnya, resapan, gelombang elektromagnet, hidrodinamik, mekanik kuantu, dan lain-lain. Ada banyak yang tidak boleh diselesaikan secara analisisan.

Biasanya, keadaan-keadaan ini membabitkan persamaan pembezaan peringkat kedua. Bentuk am bagi persamaan 2 pembolehubah peringkat kedua ialah

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi = g$$

Apabila  $b^2 - 4ac = 0$ , kita ada persamaan parabolaan. Masalah yang selalu dihadapi biasanya adalah peringkat pertama untuk satu pembolehubah dan peringkat kedua untuk yang lain, misalnya, perubahan masa peringkat pertama sementara perubahan ruang peringkat kedua. Contoh-contoh adalah seperti resapan,

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla n(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t)$$

dan persamaan Schroedinger bersandar masa

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t)$$

Apabila  $b^2 - 4ac < 0$ , kita ada persamaan eliptik. Masalah yang selalu dihadapi biasanya adalah peringkat kedua untuk setiap pembolehubah dan dengan tanda serupa, umpamanya dengan perubahan ruang peringkat kedua sahaja. Contoh-contoh adalah seperti persamaan Poisson,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$$

dan persamaan Schroedinger bebas masa

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t)$$

Apabila  $b^2 - 4ac > 0$ , kita ada persamaan hiperbolaan. Masalah yang selalu dihadapi biasanya adalah peringkat kedua untuk setiap pembolehubah dengan tanda bertentangan, umpamanya dengan perubahan ruang peringkat kedua bersama perubahan masa peringkat kedua. Contoh adalah seperti persamaan gelombang,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 u(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r}, t)$$

## 3.0.1 Pemisahan pembolehubah

Kaedah analisisan piawai bagi persamaan pembezaan separa ialah pemisahan pembolehubah.

Anggap penyelesaian berbentuk hasil darab fungsi-fungsi bebas setiap pemboleh ubah. Ini membawa kepada persamaan pembezaan biasa untuk setiap pemboleh ubah. Kemudian, setiapnya boleh diselesaikan secara berangka jika tiada cara analisis.

Sebagai contoh, pertimbangkan resapan tanpa sumber  $S$  dan dengan pekali resapan  $D$  malar,

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - D \nabla^2 n(\mathbf{r}, t) = 0$$

Andaikan

$$n(\mathbf{r}, t) = X(\mathbf{r})T(t)$$

jadi

$$XT' - DT\nabla^2 X = 0$$

memberikan

$$\frac{T'}{T} - \frac{D\nabla^2 X}{X} = 0$$

Namun,  $\mathbf{r}$ ,  $t$  bebas, jadi

$$\frac{T'}{T} = \frac{D\nabla^2 X}{X} = k^2$$

dengan  $k$  pemalar. Kita perolehi 2 persamaan pembezaan biasa. Ini diselesaikan seperti biasa. .

# 3.1 Persamaan eliptik

## 3.1.0 Bentuk persamaan

Persamaan pembezaan separa yang eliptik misalnya adalah persamaan membabitkan hubungan ruangan dalam keadaan statik, dengan kekangan di sempadan.

Penyelesaian berangka mula-mula membabitkan melakukan pendiskretan untuk dapatkan persamaan perbezaan. Misalnya, operator pembezaan

$$\frac{\partial A(\mathbf{r}, t)}{\partial x} \rightarrow \frac{A(x_{n+1}, y, z, t) - A(x_{n-1}, y, z, t)}{2\Delta x}$$

dan

$$\frac{\partial^2 A(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} \rightarrow \frac{A(x, y_{n+1}, z, t) - 2A(x, y_n, z, t) + A(x, y_{n-1}, z, t)}{(\Delta y)^2}$$

Ini memberikan persamaan perbezaan yang boleh ditulis dalam bentuk persamaan matriks antara unsur-unsur. Bergantung kepada pendiskretan yang dibuat, ia boleh membabitkan matriks-matriks yang besar. Persamaan-persamaan ini boleh diselesaikan menggunakan kaedah penyelesaian matriks.

## 3.1.1 Penyelesaian secara lelaran

Persamaan matriks boleh diselesaikan secara lelaran. Contohnya ialah penggunaan kaedah Jakobi-titik, kaedah Gauss-Siedel, dan pengenduran berlebihan berturutan.

### 3.1.1.1 Kaedah Jakob-titik

Persamaan

$$\mathbf{A}\phi = \mathbf{S}$$

perlu diselesaikan untuk  $\phi$ .

Tulis

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_{21} & 0 & 0 & \dots \\ A_{31} & A_{32} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

iaitu hasil tambah matriks pepenjuru, matriks, matriks tigasegi bawah dan matriks tigasegi atas. Maka kita perolehi hubungan lelaran seperti berikut:

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\phi = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}$$

$$\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U})\phi = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}$$

$$\phi = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\phi + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}$$

menyarankan,

$$\phi^{(p+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\phi^{(p)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}$$

Maka  $\phi$  diperolehi menerusi lelaran.

### 3.1.1.2 Kaedah Gauss-Siedel

Kaedah ini memperbaiki kaedah Jakobi, dengan mengguna unsur terkemaskini setelah dikira:

$$\phi^{(p+1)} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} \phi^{(p+1)} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\phi^{(p)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}$$

ataupun,

$$\phi^{(p+1)} = -[\mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}]^{-1}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U})\phi^{(p)} + [\mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}]^{-1} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}$$

Guna hubungan lelaran ini untuk menyelesaikan untuk  $\phi$ .

### 3.1.1.3 Pengenduran berlebihan berturutan

Di sini, kaedah Gauss-Siedel dioptimumkan. Perimbangkan persamaan

$$\nabla^2 \phi = \mathbf{S}$$

Maka

$$\phi_{i+1,j}^{(p)} + \phi_{i-1,j}^{(p)} + \phi_{i,j+1}^{(p)} + \phi_{i,j-1}^{(p)} - 4\phi_{i,j}^{(p)} - S_{i,j} \Delta^2 = R_{i,j}^{(p)}$$

mewakili sisa akibat pendiskretan ruang dengan kuantum  $\Delta$ . Bila mengira  $\phi_{i,j}^{(p+1)}$ , ubahsuai kiraan supaya  $R_{i,j}$  berubah ke arah 0. Pengiraan dipecutkan menggunakan

$$\phi_{i,j}^{(p+1)} = \phi_{i,j}^{(p)} - \alpha R_{i,j}^{(p)}$$

Nilai  $\alpha$  dipilih di antara  $\frac{1}{4}$  dan  $\frac{1}{2}$ , bergantung kepada jaringan grid.

## 3.1.2 Penyelesaian secara langsung

Ada penyelesaian misalnya yang berasaskan spektrum, dan ada yang memanfaatkan struktur matriks tiga pepenjuru.

### 3.1.2.1 Transformasi Fourier pantas

Penyelesaian persamaan matriks  $n \times n$  secara langsung memerlukan  $n^6$  operasi. Penggunaan transformasi Fourier pantas punyai kekompleksan hanya  $n^3 \log_2 n$ .

Pertimbangkan persamaan 2 dimensi

$$\nabla^2 \phi = f$$

dengan  $\phi = 0$  di sempadan. Setkan  $\Delta x = \Delta y = \Delta$  bagi  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq N$ . Definisikan operator  $[\nabla^2]$ :

$$[\nabla^2] \phi \equiv \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}$$

Ini sama dengan  $\Delta^2 f_{i,j}$ . Perhatikan bahawa fungsi harmonik Fourier,

$$S_{i,j}(K, L) = \hat{\phi}(K, L) \sin \frac{\pi K i}{N} \sin \frac{\pi L j}{N}$$

ialah fungsi eigen bagi  $[\nabla^2]$ :

$$[\nabla^2] S_{i,j}(K, L) = \dots = \varepsilon(K, L) S_{i,j}(K, L)$$

dengan nilai eigen

$$\varepsilon(K, L) = 2 \cos(\pi/N)K + 2 \cos(\pi/N)L - 4$$

Kaedah pengiraan penyelesaian adalah seperti berikut. Kembangkan  $\phi$  dan  $f$  dalam sebutan fungsi-fungsi eigen ini. Ini berbentuk siri-siri Fourier. Kita telah lakukan transformasi Fourier diskret.

$$\begin{aligned} \text{FT}[\phi_{ij}] &\rightarrow \hat{\phi}(K, L) \\ \phi_{i,j} &= \sum_{K=0}^N \sum_{L=0}^N \hat{\phi}(K, L) \sin \frac{\pi Ki}{N} \sin \frac{\pi Lj}{N} \\ & (= \sum \sum S_{i,j}). \end{aligned}$$

Begitu juga

$$\begin{aligned} \text{FT}[f_{ij}] &\rightarrow \hat{f}(K, L) \\ f_{i,j} &= \sum_{K=0}^N \sum_{L=0}^N \hat{f}(K, L) \sin \frac{\pi Ki}{N} \sin \frac{\pi Lj}{N}. \end{aligned}$$

Maka kamiran tak terhingga yang asal, beubah menjadi hasil tambah dengan sebutan terhad. Memasukkan ungkapan-ungkapan ini ke dalam perbezaan memberikan,

$$\sum_{K=0}^N \sum_{L=0}^N \{ \varepsilon(K, L) \hat{\phi}(K, L) - \hat{f}(K, L) \} \sin \frac{\pi Ki}{N} \sin \frac{\pi Lj}{N} = 0.$$

Menghendaki setiap pekali sifar,  $\{\dots\} = 0$  utk setiap  $K, L$ , membawa kepada

$$\hat{\phi}(K, L) = \frac{\hat{f}(K, L)}{\varepsilon(K, L)}.$$

Jadi, penyelesaian dibuat mengikut kaedah berikut;

- dapatkan transformasi Fourier kepada  $f_{i,j}$ ,

$$\hat{f}(K, L) = \frac{4}{N^2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N f_{i,j} \sin \frac{\pi Ki}{N} \sin \frac{\pi Lj}{N}$$

- kira nilai eigen,  $\varepsilon(K, L)$ , bagi  $[\nabla^2]$
- dapatkan  $\hat{\phi}$ ,

$$\hat{\phi}(K, L) = \frac{\hat{f}(K, L)}{\varepsilon(K, L)}$$

- kira transformasi Fouriernya untuk perolehi penyelesaian dicari,

$$\phi_{i,j} = \sum_{K=0}^N \sum_{L=0}^N \hat{\phi}(K, L) \sin \frac{\pi Ki}{N} \sin \frac{\pi Lj}{N}$$

Dalam penggunaan kaedah ini, banyak pengiraan digunakan dalam membuat pengiraan transformasi Fourier, terutama dalam penilaian fungsi trigonometri. Kaedah transformasi Fourier pantas menggunakan jalan pintas untuk pengiraan ini. Kita hanya perlu buat  $N$  penilaian  $\sin \pi Ki/N$  dan  $\cos$  berkenaan, iaitu bagi sudut-sudut dalam sukuan pertama sahaja ( $0 - \pi/2$ ), kerana nilai-nilai ini diulangi dalam sukuan 2, 3 dan 4, cuma dengan tanda berlainan mengikut fungsi dan sukuan. Juga, penggunaan hubungan-hubungan trigonometri  $\sin 2\pi/N = 2 \sin \pi/N \cos \pi/N$ ,  $\sin 3\pi/N = \sin 2\pi/N \cos \pi/N + \dots$ , dan seteusnya, membolehkan nilai fungsi pelbagai sudut dikira secara aritmetik sahaja daripada nilai asal  $\sin \pi/N$  dan  $\cos \pi/N$  tanpa memerlukan penilaian fungsi berkenaan oleh kiraan komputer.

Syarat sempadan ditangani dengan cara berikut. Kalau misalnya  $f_0 \neq 0$ , modifikasikan persamaan perbezaan di titik 1 supaya nilai ini dimasukkan sebelah kanan:

$$f_{2,j} + f_{1,j+1} + f_{1,j-1} - 4f_{1,j} = \Delta^2 f_{1,j} - f_{0,j}$$

Kalau syarat sempadan berbentuk kekangan ke atas kecerunan, maka gunakan transformasi kosinus. Kalau syarat sempadan bersifat berkala atau berkitar, maka guna transformasi penuh.

Dalam kes masalah dalam lebih daripada 1 dimensi, kita boleh guna kaedah transformasi Fourier untuk 1 dimensi, dan selesaikan sebagai perbezaan terhad dalam dimensi ke2.

### 3.1.2.2 Gelombang kecil

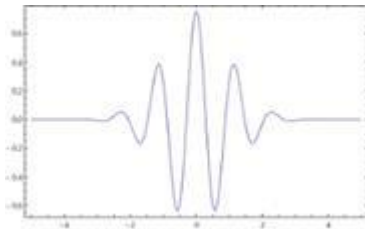
Penyelesaian ini seperti penggunaan transformasi Fourier, cuma di sini digunakan transformasi gelombang kecil. Fungsi gelombang kecil atau gelombang tersetempat, digunakan sebagai fungsi eigen sebagai ganti fungsi sinus dan kosinus. Kelebihannya ialah, fungsi ini boleh mengandungi maklumat lokasi. Ia berbentuk

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

di mana

$$\psi(t) = \frac{\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)}{\pi t}$$

seperti di bawah:



### 3.1.2.3 Penurunan berkisar

Ini merupakan kaedah cekap bagi masalah-masalah dengan matriks tiga pepenjur.

Misalnya, diberikan

$$\hat{\phi}_{j+2}(k) + (\varepsilon(k) - 2)\hat{\phi}_{j+1}(k) + \hat{\phi}_j(k) = \Delta^2 \hat{f}_{j+1}(k)$$

$$\hat{\phi}_{j+1}(k) + (\varepsilon(k) - 2)\hat{\phi}_j(k) + \hat{\phi}_{j-1}(k) = \Delta^2 \hat{f}_j(k)$$

$$\hat{\phi}_j(k) + (\varepsilon(k) - 2)\hat{\phi}_{j-1}(k) + \hat{\phi}_{j-2}(k) = \Delta^2 \hat{f}_{j-1}(k)$$

Didarabkan persamaan tengah dengan  $(2 - \varepsilon(k))$  dan hasiltambahkan dengan dua persamaan lain itu,

$$\hat{\phi}_{j+2}(k) + [2 - (\varepsilon(k) - 2)^2]\hat{\phi}_j(k) + \hat{\phi}_{j-2}(k) = \Delta^2 \{ \hat{f}_{j+1}(k) + \hat{f}_{j-1}(k) + (2 - \varepsilon(k))\hat{f}_j(k) \}$$

Ulangan tatacara ini memberikan,

$$\hat{\phi}_{j+4}(k) + [\dots]\hat{\phi}_j(k) + \hat{\phi}_{j-4}(k) = \Delta^2 \{ \dots \}$$

Akhirnya, kita perolehi persamaan yang menghubungkan nilai di sempadan-sempadan dengan nilai di paling tengah. Bila nilai tengah diketahui, kita ada dua rantau dengan persamaan-persamaan hubungan mengaitkan nilai-nilai sempadan dan nilai tengah masing-masing. Ini memberikan nilai tengah masing-masing, dan kita peolehi hubungan sempadan-tengah untuk 4 rantau. Ini diulang seterusnya sehingga semua nilai didapati.

Kaedah ini boleh diamkan kepada kes 2 dimensi (atau lebih) – ini dikenali sebagai penurunan berkisar dwiganda.

### 3.1.3 Kaedah variasi

Kaedah ini berguna dalam kes misalnya apabila jejaring pendiskretan tidak nalar, atau sempadan

berbentuk tidak mudah, atau wujud ketakhomogenan seperti sebutan

$$\nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla A(\mathbf{r}, t).$$

Kaedah ini juga merupakan asas bagi kaedah unsur terhingga.

Pertimbangkan

$$E = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - S \phi \right]$$

yang memberikan

$$\delta E = \int_0^1 dx \int_0^1 dy [\nabla \phi \cdot \nabla \delta \phi - S \delta \phi]$$

Kamirkan bahagian demi bahagian,

$$\delta E = \oint dl \delta \phi \mathbf{n} \cdot \nabla \phi + \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta \phi [-\nabla^2 \phi - S]$$

Kamiran pertama adalah keliling sempadan rantau perhatian;  $\mathbf{n}$  adalah normal kepada sempadan.

Katakan kita diberikan syarat sempadan Dirichlet (yakni berbentuk  $\delta \phi = 0$ ) atas sempadan. Maka

$$\oint \delta \phi = 0$$

Kemudian,  $\delta E = 0$  bermakna

$$-\nabla^2 \phi = S$$

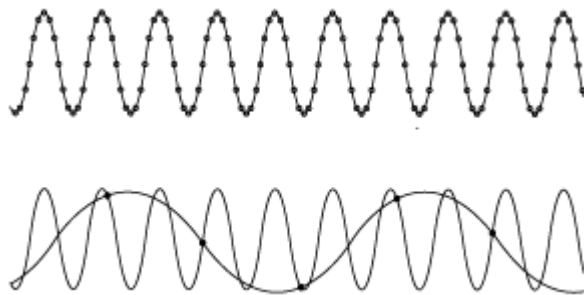
Anggarkan  $E$  terhadap  $\phi_{i,j}$  dan kemudian letakkan

$$\frac{\partial E}{\partial \phi_{i,j}} = 0$$

untuk mendapatkan persamaan perbezaan.

### 3.1.4 Masalah pengalisan

Akibat pendiskretan ruang, apabila  $L < 2\Delta x$ , di mana nombor gelombang  $k = 2\pi/L = 2\pi/(n\Delta x)$ , gelombang perlahan boleh disalahtafsir sebagai gelombang lebih pendek  $k > k_{\max}$ , dengan  $k_{\max} = 2\pi/(2\Delta x)$ . Perkara seperti ini juga berlaku apabila gelombang bercampur. Rajah di bawah menerangkan fenomena pengalisan ini: yang di atas menunjukkan kadar penyampelan yang sesuai bagi suatu gelombang dengan jarak gelombang diberikan; yang di bawah menunjukkan, apabila kadar penyampelan terlalu perahan, suatu gelombang yang lebih besar jarak gelombangnya boleh ditafsiri





## 3.2 Persamaan parabolaan

### 3.2.0 Persamaan dan penyelesaian

Satu misal persamaan parabolaan ialah yang dengan perubahan masa peringkat pertama, dan perubahan ruang peringkat kedua. Ini merupakan suatu masalah nilai awal.

Untuk masalah seperti ini, boleh diselesaikan seperti untuk masalah nilai awal, misalnya menggunakan kaedah Euler. Cuma bagi setiap langkah masa, perlu diselesaikan bahagian ruang, yang biasanya berbentuk masalah nilai sempadan. Boleh misalnya digunakan ransformasi Fourier untuk satu dimensi ruang, dan kaedah lalaran untuk dimensi ruang yang sisa.

Pendiskretan ruang boleh memberi kesan kepada kestabilan kaedah Euler dan ysgn serupanya. Sebagai contoh, pertimbangkan:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

Kaedah Euler memberikan persamaan perbezaan

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + \frac{K\Delta t}{(\Delta x)^2} (\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n)$$

Kalau dikembangkan  $\phi(x,t)$  sbg siri Fourier di bahagian ruang,

$$\phi(x,t) = \sum_k \hat{\phi}_k(t) e^{ikx}$$

dan dilihat pada hanya satu mod pada satu langkah masa,

$$\phi(x, n\Delta t) = \hat{\phi}_k^{(n)} e^{ikx}$$

maka gandaan ralat

$$g = 1 - 4\beta \sin^2 k\Delta x/2$$

di mana

$$\beta = K\Delta t/(\Delta x)^2$$

adalah stabil kalau

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2K}.$$

Bagi kaedah lompat katak pula,

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^{n-1} + 2\beta (\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n)$$

maka

$$g^2 - 8\beta g \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} - 1 = 0$$

memberikan akhirnya

$$|g| > 1.$$

Kaedah katak lompat tak stabil.

### 3.2.1 Kaedah Crank-Nicholson

Ini adalah suatu kaedah tersirat. Ia berdasarkan kaedah Euler, yang menggunakan purata terhadap

masa di sebelah kanan.

Persamaan perbezaan terhasil ialah,

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + \frac{\beta}{2} [(\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n) + (\phi_{j+1}^{n+1} - 2\phi_j^{n+1} + \phi_{j-1}^{n+1})]$$

yang bermakna

$$g = \frac{1 - 2\beta g \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}}{1 + 2\beta g \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}}$$

Lihat bahawa  $|g| \leq 1$  untuk apa-apa  $k\Delta x$  selagi  $\beta > 0$ . Kaedah ini stabil tanpa syarat.

### 3.2.2 Kaedah Dufort-Frankel

Ini juga kaedah tersirat. Ia juga berdasarkan kaedah Euler.

Gunakan persamaan perbezaan

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + 2\beta [\phi_{j+1}^n - (\phi_j^{n+1} + \phi_j^{n-1}) + \phi_{j-1}^n]$$

yang bermakna

$$g = \frac{1}{(1+2\beta)} (2\beta \cos k\Delta x \pm \sqrt{1 - 4\beta^2 \sin^2 k\Delta x})$$

Jika

$$1 - 4\beta^2 \sin^2 k\Delta x > 0$$

yakni

$$\beta^2 \leq \frac{1}{4}$$

maka  $g$  nyata, dan  $|g| \leq 1$  untuk kedua-dua punca. Jika pula

$$1 - 4\beta^2 \sin^2 k\Delta x < 0$$

maka  $g$  kompleks, dan

$$|g|^2 = \frac{2\beta - 1}{2\beta + 1} \leq 1$$

Kaedah ini stabil tanpa syarat.

## 3.3 Persamaan hiperbolaan

### 3.3.0 Persamaan dan penyelesaian

Misalan persamaan hiperbolaan ialah persamaan yang berparameterkan masa dan ruang, dengan kedua-duanya peringkat kedua, dan mempunyai berlainan tanda. Persamaan seperti ini timbul dalam aplikasi fizik sebagai model gelombang. Ia berbeza dgn persamaan parabolaan di mana domain pengaruhnya dan pergantungannya terhad. Kesingularan dalam penyelesaiannya merambat tanpa diratakan.

Contoh, persamaan gelombang,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Penyelesaian umumnya berbentuk

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$$

dengan  $f, g$  sembarangan. Ini merupakan penyelesaian d'Alembert – iaitu superposisi dua gelombang (dengan profil sembarangan) yang bertentang arah. Bandingkan ini dengan persamaan haba, yang hampir serupa, tetapi daripada persamaan parabolaan, yang berbentuk

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

dan mempunyai penyelesaian

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4t} f(y) dy$$

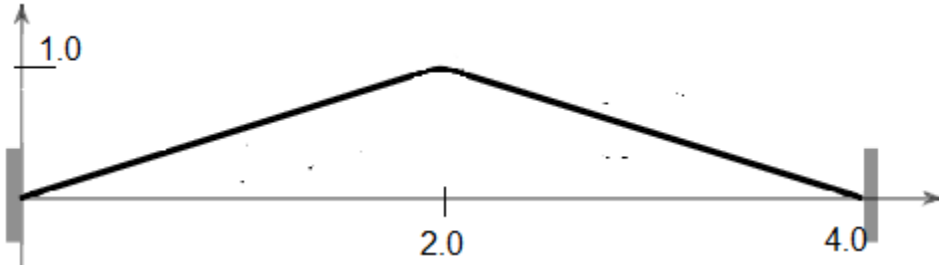
untuk  $t > 0$ . Perbezaan di antara keduanya adalah:

- Persamaan gelombang punyai laju rambatan dan domain terhad
- Persamaan gelombang terbalikkan terhadap masa
- Penyelesaian persamaan gelombang tidak menjadi lebih rata terhadap masa
- Persamaan gelombang tidak puaskan apa-apa hukum maksimum

Penyelesaian berangka adalah menerusi pendiskretan seperti biasa. Pendiskretan memberikan persamaan perbezaan yang membabitkan matriks ruang×masa, yang boleh diselesaikan menggunakan kaedah biasa.

# Tugas 6

1. Suatu tangsi panjang  $l=4.0$  (dalam unit tertentu) diikat didua hujungnyaditarik tengahnya ke tinggi  $h=1.0$ .



Jika  $f(x)$  mewakili tinggi tangsi pada titik  $x$ , dan dikembangkan sebagai siri sinus Fourier,

$$f_j = \sum_{k=1}^J a_k \sin \frac{\pi jk}{J}$$

tulis aturcara untuk mengira pekali

$$a_k = \frac{2}{J} \sum_{j=1}^J f_j \sin \frac{\pi jk}{J}$$

dengan pilihan  $J=16$ .

Plot

$$f_j = \sum_{k=1}^N a_k \sin \frac{\pi jk}{J}$$

bagi  $N = 1, 2, 3, 4, 8, 16$ .

Selesaikan untuk gelombang di atas tangsi itu selepas itu, jika ia mematuhi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

dengan membuat transformasi sinus Fourier bagi ruang,

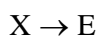
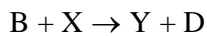
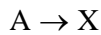
dan menurunkan persamaan peringkat kedua bagi masa kepada peringkat pertama dengan penggantian, dan menyelesaikannya menggunakan kaedah Euler dengan memenuhi syarat kestabilan.

Plot penyelesaian anda terhadap masa.

2. Tuliskan aturcara untuk menyelesaikan persamaan Schroedinger bersandar masa dalam satu dimensi ruang, menggunakan kaedah Crank-Nicolson.

Uji dengan gelombang Gaussian yang datang dari kiri tuju ke atas suatu keupayaan telaga empatsegi.

3. Suatu rangkaian tidak balas kimia diperihalkan



Kadar penghasilan/pemusnahan X dan Y (menggunkan unit-unit berpatutan) diberi oleh persamaan-persamaan kepekatan

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B + 1)X + X^2Y + R_X \nabla^2 X$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2Y + R_Y \nabla^2 Y$$

di mana diandaikan  $A$  dan  $B$  berkedudukan tetap,  $D$  dan  $E$  lengai, dan hanya  $X$  dan  $Y$  meresap dengan pemalar resapan  $R_X$  dan  $R_Y$  masing-masing.

Tunjukkan bahawa bila  $X = X_0 = A$ ,  $Y = Y_0 = B/A$ , keseimbangan berlaku.

Tulis aturcara yang menyelesaikan persamaan-persamaan taklinear kepekatan dalam satu dimensi ruang antara 0 dan 1, untuk kes syarat sempadan tiada fluks, untuk 40 titik ruang. Sebutan tindakbalas boleh ditangani secara eksplisit, sementara sebutan resapan boleh ditangani secara tersirat untuk mengukuhkan kestabilan.

Plot  $X$  dan  $Y$  terhadap ruang, untuk berlainan langkah masa.

Gunakan aturcara anda untuk menyiasat telatah penyelesaian-penyelesaian bagi nilai-nilai berlainan untuk  $B$ ,  $R_X$ ,  $R_Y$ . (mungkin boleh mula cuba  $R_X = 1 \times 10^{-3}$ ,  $R_Y = 4 \times 10^{-3}$ , dan pilih nilai  $B$  yang menarik). Siasat keadaan awal bersepadan dengan sinusoid rata, dan usikan-usikan setitik rawak kepada tatarajah keseimbangan seragam (gunakan fungsi penjana nombor rawak).

Sahkan yang anda boleh temui kes-kes

- (i) di mana sistem mengendur kepada keadaan seragam,
- (ii) di mana ia menghampiri secara asimptot, suatu penyelesaian bebas masa dengan variasi ruang tak remeh ('struktur lesapan'), dan
- (iii) di mana ia menghampiri suatu penyelesaian mengayun terhadap masa dan ruang. (Tentukan langkah masa anda cukup kecil untuk membenarkan kamiran tepat persamaan-persamaan).

Kembangkan kod anda untuk sistem dua dimensi ruang menggunakan kaedah yang munasabah.

Plotkan hasilnya pada berlainan langkah masa.

Kaji untuk berlainan nilai-nilai parameter dan keadaan-keadaan awal.