

5. Kaedah Kebarangkalian

5.0 Nombor rawak

5.1 Proses rawak

5.2 Monte Carlo

5.3 Kaedah Metropolis

5.4 Beberapa Sistem Statistikan

- Tugas 9
- Tugas 10
- Tugas 11

5.0 Nombor Rawak

5.0.0 Kerawakan

Suatu pembolehubah rawak boleh mengambil nilai tertentu daripada yang dibolehkan (mungkin daripada suatu julat selanjar), yang tak boleh diramalkan. Namun taburan kebarangkalian nilai-nilai ini boleh diketahui.

Kebarangkalian nilai pembolehubah rawak u' berada di antara u dan $u+du$ ditandakan

$$P(u < u' < u+du).$$

Kita tulis

$$P(u < u' < u+du) = g(u)du$$

di mana $g(u)$ adalah fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi nilai itu. Kita boleh tulis

$$G(u) = \int_{-\infty}^u g(x)dx \quad \text{ataupun} \quad g(u) = \frac{dG(u)}{du},$$

dengan G meningkat secara ekanada daripada 0 kepada 1.

Nilai jangkaan suatu fungsi $f(u')$ adalah nilai min atau puratanya, iaitu,

$$E[f] = \int f(u)dG(u) = \int f(u)g(u)du$$

Kalau u' bertaburan seragam antara a dan b , iaitu $dG = du/(b-a)$, maka

$$E[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du$$

Juga,

$$E(u') = \int u dG(u) = \int u g(u) du.$$

Varians suatu taburan pula ialah purata bagi kuasadua sisihan daripada jangkaan,

$$V[f] = E[(f - E[f])^2] = \int (f - E[f])^2 dG = E[f^2] - E[f]^2$$

Ia mencirikan 'lebar' taburan. Sisihan piawai,

$$\sigma = \sqrt{\text{varians}}$$

Perhatikan bahawa min berbentuk linear,

$$E(cx+y) = cE(x) + E(y)$$

namun

$$V(cx+y) = c^2V(x) + V(y) + 2cE[(y-E(y))(x-E(x))].$$

Dua pembolehubah rawak u dan v dikatakan bebas di antara satu sama lain, secara stokastik, jika fungsi ketumpatan kebarangkalian bersama, di antara keduanya, $g(u,v)$ boleh ditulis sebagai pendaraban, $g_1(u).g_2(v)$ katakan.

Jika x dan y bebas,

$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

yakni,

$$\sigma_{x+y} = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}.$$

Hukum bilangan besar menyatakan,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(u_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u)du .$$

Purata sesuatu fungsi f , dalam had bilangan besar data, menumpu kepada nilai jangkaannya. Antara lain, ini bermakna, kaedah anggaran 'Monte Carlo' (MC), iaitu pengiraan sifat-sifat f menerusi penjanaan nombor-nombor rawak (biasanya berkomputer) menurut taburan f adalah anggaran yang konsisten. Anggaran-anggaran ini menumpu dengan bertambahnya sampel. Adalah,

- Jika varians $V(f)$ terhad, anggaran MC $\rightarrow$ nilai sebenar
- Nilai jangkaan $E(f)$ tak pincang untuk apa-apa saiz sampel n

Kemudian, ada Teorem Had Pusat, yang menyatakan,

bila n besar, $E(f)$ menghampiri taburan normal,

dan

sisihan piawai bagi $E(f)$ ialah $\sigma = \sqrt{V(f)/n}$.

5.0.1 Nombor Rawak Sebenar

Nombor rawak sebenar tak boleh diramalkan, maka ia tak boleh dijanasemula secara berketentuan, secara bersendiria ataupun dalam bentuk siri. Ia diperolehi daripada proses rawak dalam fizik, misalnya reputan radioaktif, hingar terma dalam elektronik, ketibaan sinar kosmos, dan lain-lain.

Unsur kerawakan fizik termasuk: fenomena kuantum, dinamik kalut, sistem stokastik. Parameter rawak daripada sistem fizik ini perlu dituai.

Ada parameter fizikan yang hampir rawak, yang timbul daripada kerumitan mengira perkembangan tertentu. Misalnya, digit mikrosaat dalam masa komputer semasa secara asasnya berketentuan, namun setelah beberapa operasi aras tinggi komputer, kita tak dapat meramalkannya secara kasar.

Set nombor-nombor rawak boleh diperbaiki untuk memberikan taburan yang lebih baik. Misalnya, walaupun suatu set itu punyai nombor-nombor rawak dalam erti kata tiada korelasi di antara nombor-nombor ini, taburannya mungkin terpincang. Pembuangan pincang boleh dilakukan seperti berikut. Sebagai contoh, kita ada jujukan rawak 0 dan 1, tetapi mungkin $P(0)$ dan $P(1)$ tak setepatnya $\frac{1}{2}$. Caranya di sini ialah, lihat pasangan bit dalam jujukan: jika ianya sama, abaikan, dan jika ia berlainan, pilih bit kedua. Perhatikan bahawa jika $P(01) = P(0) \times P(1) = P(10)$ (tiada korelasi antara bit dalam jujukan), kebarangkalian baru $P'(0) = P(1) \times P(0)$ dan $P'(1) = P(0) \times P(1)$, iaitu sama.

5.0.2 Nombor Pseudorawak

Nombor pseudorawak dijana menerusi rumus matematik untuk meniru penghasilan nombor-nombor rawak. Ia secara prinsipnya boleh dijanasemula, makai a tidak sebenarnya rawak. Namun ia tak dapat dibezakan daripada jujukan yang rawak sebenar.

Walaubagaimanapun, oleh kerana rumus yang digunakan yang biasanya bergantung kepada nilai janaan semasa, suatu nombor tertentu bakal memberikan jujukan nombor-nombor janaan berikut yang sama bagi nombor pertama yang sama. Kala sesuatu rumus penjana itu merujuk kepada berapa nombor 'rawak' diberikan sebelum jujukan diulang.

Suatu kaedah penjanaan nombor pseudorawak ialah Kaedah Tengah Kuasadua:

Mula dengan nombor dengan r digit (benih)

Berikan nombor di digit tengah ($r/2$) sebagai nombor rawak pertama
Kuasaduakan nombor ini, memberikan nombor baharu berdigit r .
Ulang.

Modifikasi kaedah ini ialah Kaedah Kongruenan Daraban/Kongruenan Linear. Di sini, kita bermula dengan tetapan nilai-nilai modulus m , pekali a , dan pemula r_0 . Nombor rawak dijana menerusi lelaran

$$r_i = a r_{i-1} \pmod{m}$$

Biasanya m dipilih supaya pendaraban dua integer berbit t dimoduluskan memberikan integer t bit terendah. Kaedah ini punyai kala yang menghampiri $m/4$.

Kita boleh juga gunakan Kongruenan Bercampur, dengan

$$r_i = (a r_{i-1} + b) \pmod{m}$$

Untuk kaedah-kaedah penjanaan nombor pseudorawak, kitab oleh uji kerawakan nombor-nombor yang dijana. Misalnya, purata untuk n nombor pertama boleh digunakan. Perubahan nilai ini terhadap n boleh disiasati.

Penjana kongruenan ada kemungkinan menunjukkan kesan Marsaglia. Kesan ini ialah apabila kerawakan dipaparkan dalam satu dimensi, tetapi terlihat korelasi dalam dimensi lebih tinggi. Korelasi ini ditunjukkan apabila d tupel berturutan diplot dalam d dimensi, berada di atas bilangan terhad hipersatah selari. Kesan ini didapati dalam kongruenan daraban, Kesan ini boleh dicuba dikurangkan dengan membanyakkan hipersatah menerusi Kongruenan Daraban Majmuk, dengan

$$r_i = (a r_{i-1} + b r_{i-2}) \pmod{m}.$$

5.0.3 Nombor Kuasirawak

Nombor kuasirawak ialah nombor pseudorawak yang tidak begitu rawak, dengan hanya kerawakan yang mencukupi untuk pengiraan yang hendak dijalankan. Misalnya, kadang-kadang sesuatu pengiraan tak perlu kebebasan dalam jujukan yang digunakan, dan kadang-kadang darjah turun-naik tak begitu penting dalam sesuatu pengiraan.

Contoh-contoh kaedah penjanaan nombor kuasirawak adalah jujukan Korobov, penjana Richtmeyer, dan penjana van der Corput.

5.0.4 Pengurangan Varians

Set nombor-nombor rawak yang tinggi varians mencerminkan taburan yang kurang menumpu. Varians boleh dikurangkan dengan memilih n besar dan memilih cara penyampelan. Cara pertama jelas, daripada teorem had pusat. Ada beberapa kaedah cara kedua, termasuk yang berikut.

Dalam penyampelan berlapis, dibelahkan kamiran pengiraan kepada subselang, dan kemudian dihasiltambahkan separa hasiltambah. Varians keseluruhan ialah hasiltambah varians, yang boleh berkurang atau bertambah. Yang termudah ialah pelapisan seragam.

Untuk penyampelan kepentingan pula, ambil bilangan sampel lebih banyak dalam rantau f lebih besar:

$$f(x)dx \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} dG(x)$$

Ini macam perubahan pembolehubah.

Bagi variat pengawal, kamiran ditulis

$$\int f(x)dx = \int (f(x) - g(x))dx + \int g(x)dx$$

di mana sebutan kedua sebelah kanan diketahui, dan $g(x)$ hampir kepada $f(x)$. Ini memberikan varians hanya akibat daripada sebutan pertama, dan ianya kecil.

Untuk variat antitetik, nombor rawak yang tak bebas digunakan. Bahkan yang punyai korelasi negatif dipilih. Sebagai contoh, dalam menghasiltambah $f(x)$, pilih $f(x)$ bila x kecil, dan pilih $f(1-x)$ bila x besar, bagi x yang seragam antara 0 dan 1.

Ada juga kaedah pengurangan varians suaian. Dalam kaedah oleh Sheppey dan Lautrup, disesuaikan saiz lapisan menurut besarnya f di rantau berkenaan di mana dikecilkan saiznya bila f besar. Dalam kaedah oleh Friedman, ada fasa tinjauan di mana pelapisan dibuat, dan fasa penilaian di mana penilaian dibuat.

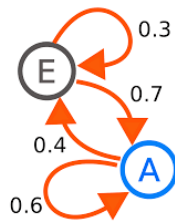
5.1 Proses Rawak

5.1.0 Ciri proses rawak

Proses-proses rawak punyai bebarapa ciri.

Ia bersifat stokastik, Ia bertelatah rawak namun boleh dianalisis secara statistik, tetapi tidak boleh diramalkan secara tepat.

Jika kebarangkalian keadaan suatu sistem stokastik bergantung kepada keadaan sebelumnya, dan hanya keadaan sebelumnya itu ia Markovan. Ia disebut proses Markovan atau rantai Markovan, dan boleh diwakilkan dalam bentuk gambarajah keadaan, contohnya,



Tulis kebarangkalian peralihan sebagai $T(X \rightarrow X')$. Maka

$$\sum_{X'} T(X \rightarrow X') = 1$$

Bagi proses bukan Markovan dalam ertikata ia bebas dan takterkorelasi, kebarangkalian jujukan tertentu

$$P_N(X_1, X_2, \dots, X_N) = P_1(X_1) \cdot P_1(X_2) \cdot \dots \cdot P_1(X_N)$$

untuk jujukan $X_1, X_2, \dots, X_N$, di mana kebarangkalian P_1 sama, tak berubah.

Sesuatu proses itu disebut ergodik jika mana-mana tatarajah atau keadaan itu boleh didatangi daripada mana-mana tatarajah lain. Ini bermakna tiada perkalaan yang membabitkan subset tatarajah-tatarajah ini.

5.1.1 Pergerakan Brownan dan perjalanan rawak

Proses pergerakan Brownan mewakili pergerakan rawak yang dipaparkan oleh zarah-zarah kecil yang terampai dalam cecair. Ini diperihalkan oleh perjalanan rawak.

Pergerakan Brownan adalah proses stokastik yang Markovan. Keadaan semasa tidak bergantung kepada sejarah sistem. Suatu pergerakan Brownan diperihalkan oleh kebarangkalian bergerak pada sesuatu arah dengan sesuatu jarak. Boleh dicari, selepas beberapa masa tertentu, fungsi taburan kebarangkalian bagi jarak dari titik asal.

Pergerakan Brownan atau perjalanan rawak ini boleh digunakan untuk memerihalkan pelbagai proses, termasuk untuk model bagi turun-naik jangka pendek pasaran saham.

5.1.2 Proses mencabang

Proses mencabang berlaku dalam satu sistem bila jujukan penjanaan nombor rawak boleh melalui jalan yang bercabang.

Contoh proses mencabang ialah reproduksi. Ia berjalan seperti berikut:

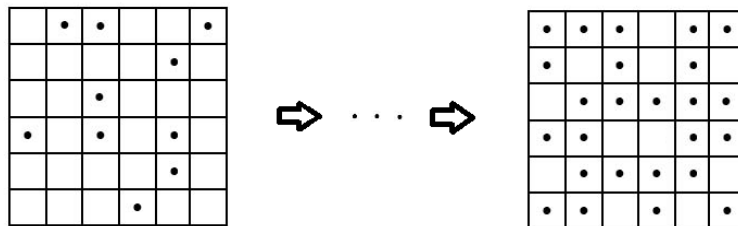
1. Pada $t = 0$, $Z_0 = 1$.
 2. Pada $t = 1$, Z_0 (kalau bukan 0) $\rightarrow Z_1 =$ nombor rawak menurut “taburan anak”
 3. Pada $t = 2$, Z_1 (kalau bukan 0) $\rightarrow Z_{2,1}, Z_{2,2}, \dots, Z_{2,Z_1}$ setiapnya spt (2.)
- Ulang

Ia adalah suatu proses Markovan.

Satu lagi contoh ialah model penyebaran penyakit. Setiap individu yang dijangkiti mempunyai kebarangkalian rawak tertentu untuk menjangkiti jirannya sebelum dia pulih atau mati. Penyebaran penyakit ini menghasilkan proses bercabang di mana ia berlanjutan dengan setiap generasi menghasilkan lebih ramai individu yang dijangkiti. Ia berakhir dengan kepunahan di mana semua jangkitan hilang, atau pandemik di mana kebanyakan individu dijangkiti.

5.1.3 Ketelusan/Perkolasi

Ini relevan bagi rangkaian unsur-unsur Telatah perkolasi berlaku apabila nod/patuan memamerkan perubahan fasa daripada gugusan-gugusan kecil tak bersambung kepada gugusan rentang besar, seperti contoh di bawah,



Perkolasi boleh digunakan sebagai model untuk bahan, jangkitan penyakit, dan sebagainya.

Ia juga merupakan proses yang Markovan.

5.1.4 Cerucuk Pasir

Ini suatu model di mana keruntuhan pasir dalam cerucuk dibayangkan. Ada jujukan sela dengan amaun ‘pasir’ amsing-masing. Pasir dijatuhkan ke atas sela yang paling hulu. Jika cerun pasir di antara dua sela terlalu besar, pasir dari sela yang lebih runtuh ke sela yang sebelahnya itu.

Model ini digunakan untuk mengkaji kegentingan terswaorganisasi. Ini adalah di mana keadaan genting muncul secara organisasi dalaman, tanpa kawalan luar.

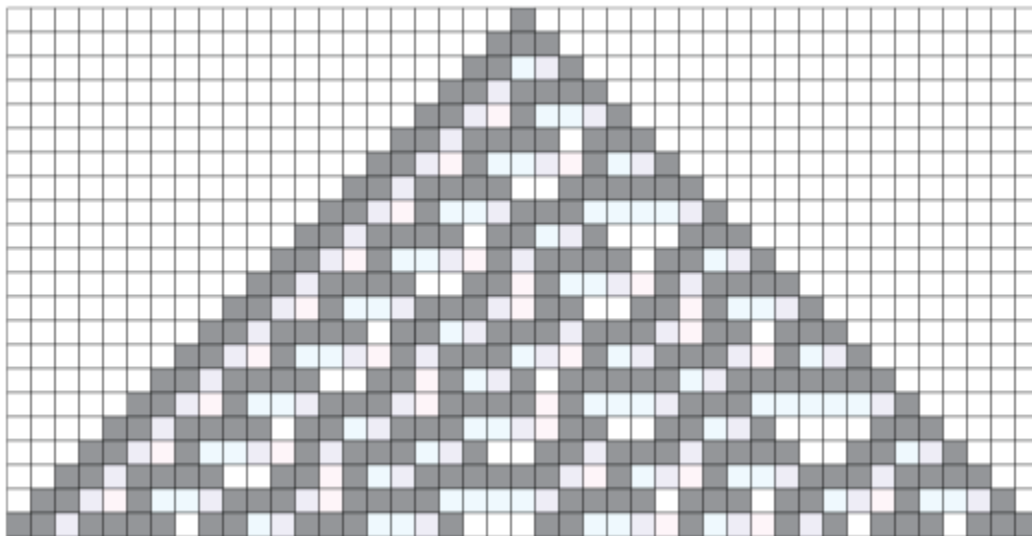
5.1.5 Permainan, Rangkaian, Sosiofizik

Ada usaha untuk memahami sistem kompleks di dalam fizik, kimia, biologi dan sosiologi sebagai sistem stokastik.

Automaton bersel, atau permainan kehidupan, memodel kerjiranan sel-sel yang mempengaruhi di antara mereka. Keadaan sesuatu sel (diwakili nilai tertentu) bergantung kepada keadaan jiran-jirannya menerusi misalnya suatu fungsi logik diberi. Misalnya, bagi sel-sel dalam satu dimensi ruang, diwakili suatu vektor nilai-nilai, keadaan sesuatu sel berubah menurut hukum seperti, misalnya, yang berikut ini,

pola semasa 3 sel berjiranan	111	110	101	100	011	010	001	000
keadaan baharu sel tengah	0	0	0	1	1	1	1	0

Hukum ini disebut hukum 30, kerana nombor dedua 000111110 ialah perpuluhan 30. Rajah di bawah menunjukkan evolusi suatu tatasusunan sel-sel (mengufuk) terhadap masa (menegak ke bawah), di mana sel gelap mewakili keadaan 1 dan terang keadaan 0, bermula dengan hanya satu sel di tengah tatasusunan bernilai 1, menurut hukum ini.



Bagi automanton bersel ini, sel-sel atau agen-agen di atas kekisi bersalingtindak menerusi logik. Salingtindak lebih rumit boleh diadakan, dengan menggunakan permainan. Dalam permainan, ada jadual habuan daripada pilihan perubahan keadaan sesuatu agen, bergantung kepada pilihan ‘pemain’ atau agen lain. Contoh permainan ialah dilemma banduan di antara dua agen, yang setiapnya boleh memilih samada ‘bekerjasaama’ atau ‘berpaling tadah’. Jadual habuan permainan ini diberikan di bawah, dengan habuan-habuan P, R, S dan T mewakili nilai-nilai diberikan:

		B	
A	A	 B kerjasama	 B berpalingtadah
	A kerjasama	 R=1	 R=1
	A paling tadah	 T=0	 S=3

Agen-agen atas kekisi bolehlah menjalankan permainan bersama jiran-jiran. Mungkin agen-agen ini memajukan suatu strategi dalam pilihan tindakan yang boleh memberikan habuan yang besar dalam evolusi mereka terhadap masa.

Untuk model yang lebih rumit, salingtindak antara agen-agen atau unsur-unsur boleh diperihalkan oleh rangkaian, dan bukan hanya berjiranan di atas kekisi. Struktur rangkaian itu sendiri menambahkan kerumitan dan kesan-kesan tambahan.

Model-model seperti ini digunakan dalam mewakili sistem social dan sistem ekonomi sebagai sistem stokastik.

5.2 Monte Carlo

5.2.0 Kaedah

Secara kasar, kaedah Monte Carlo ialah suatu cara penyelesaian masalah menggunakan nombor rawak.

Dalam kaedah Monte Carlo, penyelesaian diwakilkan sebagai parameter suatu populasi hipotesisan. Jujukan nombor rawak digunakan untuk membina suatu sampel populasi berkenaan, daripada mana anggaran statistikan parameter tersebut boleh didapati.

Ia tidak terhad kepada masalah stokastik sahaja. Ia berguna terutama bagi masalah-masalah dengan bilangan darjah kebebasan besar, atau berdimensi besar.

Secara formalnya, kaedah Monte Carlo ialah kaedah kamiran, berasaskan hukum bilangan besar. Kalau hasil Monte Carlo ialah fungsi nombor rawak, $F(r_1, r_2, \dots, r_n)$, maka jangkaan F ialah kamiran I ,

$$I = \int \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Sebagai contoh,

$$S = \int_0^1 f(x) dx.$$

Maka

$$S \cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n)$$

di mana x_n ialah set N nilai daripada nombor rawak seragam dalam selang $[0,1]$.

Pada banyak kes, taburan kebarangkalian tak seragam diperlukan. Untuk menjana nombor rawak menurut taburan tertentu, $f(x)$, dengan $f(x)dx$ mewakili kebarangkalian untuk memperolehi nilai antara x dan $x+dx$, boleh digunakan beberapa cara.

Kaedah transformasi songsangan adalah seperti berikut. Katakan taburan untuk x diperolehi dengan mentransformasikan u , di mana u ialah nombor rawak dengan taburan seragam $g(u)=1$ antara 0 dan 1, menurut $x = F^{-1}(u)$. Ataupun, $u = F(x)$. Oleh kerana $f(x)dx = g(u)du$, maka

$$f(x) = g du/dx = dF/dx.$$

Sebagai contoh, pertimbangkan

$$f(x) = (1/\beta)\exp(-x/\beta).$$

Jadi,

$$F(x) = 1 - \exp(-x/\beta) = u$$

atau

$$x = -\beta \ln(1-u).$$

Maka, untuk mendapatkan set nombor rawak bertaburan $(1/\beta)\exp(-x/\beta)$, secara berulang pilih u secara rawak di antara 0 dan 1, dan kemudian kira $x = -\beta \ln(1-u)$.

Bagi kaedah gubahan, pecahkan fungsi taburan kebarangkalian kepada hasil tambah fungsi-fungsi taburan kebarangkalian yang mudah dibuat. Contoh,

$$f(x) = (5/12)[1 + (x-1)^4]; 0 \leq x \leq 2.$$

Pecahkan,

$$f_a(x) = \frac{1}{2}$$

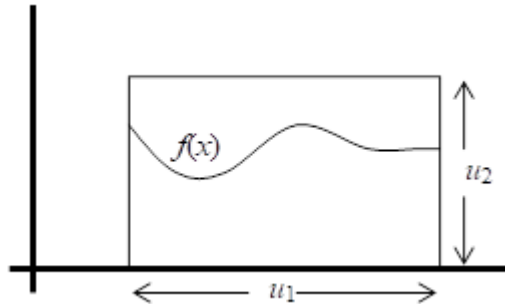
$$f_b(x) = (5/2)(x-1)^4$$

dengan

$$f(x) = (5/6) f_a(x) + (1/6) f_b(x).$$

Perhatikan hasil tambah pekali bersamaan 1. Dijana nombor rawak u_1 : jika $u_1 < 5/6$, guna f_a – jana u_2 , $x = 2 u_2$; jika $u_1 > 5/6$ guna f_b – jana u_2 , $x = 1 + \sqrt[5]{(2u_2)}$.

Kaedah yang umum untuk apa-apa taburan rawak ialah kaedah penerimaan-penolakan atau kaedah von Neumann. Dua nombor rawak seragam u_1 dan u_2 dijana sekaligus. Terima $x = u_1$ jika $u_2 < f(u_1)$ yakni jika titik (u_1, u_2) di bawah lengkung kebarangkalian. Dengan itu, kadar penerimaan sesuatu nombor rawak itu diberikan kebarangkalian diberi $f(x)$.



Ketakcekapan kaedah ini timbul bila bentuk $f(x)$ tidak seimbang dalam ertikata sebahagiannya mempunyai nilai sangat tinggi sementara bahagian yang lain mempunyai bahagian sangat rendah – banyak calon ditolak apabila dijana dalam bahagian $f(x)$ rendah. Ini boleh diatasi dengan menggunakan kaedah gubahan yang menggubah dua bahagian ini, dan kaedah von Neumann untuk setiap bahagian itu.

Untuk menjana nombor rawak bertaburan Gaussian, kita boleh buat menerusi Teorem Had Pusat. Teorem ini menyatakan bahawa hasil tambah nombor-nombor ralat menurut apa-apa taburan akan memberikan taburan Gaussian dalam had bilangannya besar. Sebagai contoh, taburan seragam antara $[0,1]$ boleh dipilih. Untuk taburan ini, nilai jangkaan ialah $\frac{1}{2}$, dan variansnya ialah $1/12$. Jika dihasiltambahkan n nilai-nilai ini,

$$E(R_n) = n/2,$$

$$V(R_n) = n/12.$$

Untuk memperolehi taburan Gaussian dengan min 0 dan varians 1, bolehlah digunakan sebagai nombor rawak dijana.

5.2.1 Monte Carlo variasi

Monte Carlo variasi adalah teknik statistik yang digunakan untuk menghampiri penyelesaian kepada masalah pengoptimuman atau pengiraan integral yang kompleks, terutamanya dalam sistem kuantum dan simulasi fizik. Teknik ini melibatkan penggunaan kaedah Monte Carlo untuk menjana sampel rawak daripada ruang tatarajah yang luas, dan kemudian menggunakan kaedah variasi untuk mengoptimumkan parameter-parameter yang tertentu dalam persamaan gelombang atau model yang digunakan. Dengan pendekatan ini, hasil perkiraan penyelesaian masalah dapat ditingkatkan melalui proses meminimumkan tenaga atau meminimumkan ralat. Teknik ini amat berguna apabila penyelesaian analisis tepat tidak praktikal atau sukar diperoleh. Hasil pengiraan menjadi lebih tepat

dengan peningkatan bilangan sampel yang diambil.

Sebagai contoh, dalam kajian sistem kuantum seperti atom hidrogen, Monte Carlo variasi digunakan untuk mengira tenaga keadaan asas atom tersebut. Kita mula dengan memilih fungsi gelombang uji yang mengandungi parameter yang boleh diubahsuai. Sebagai contoh, fungsi gelombang boleh berbentuk $\psi(r, \alpha)$, di mana α adalah parameter variasi yang kita ingin optimumkan.

Dengan menggunakan teknik Monte Carlo, kita jana pelbagai tatarajah rawak untuk elektron di keliling nukleus atom. Bagi setiap tatarajah, kita kira tenaga sistem berdasarkan hamiltonan sistem dan fungsi gelombang uji. Kemudian, kita suaikan nilai α untuk meminimumkan tenaga purata yang diperoleh dari sampel rawak tersebut.

Proses ini memberikan anggaran tenaga keadaan asas yang mendekati nilai sebenar. Teknik Monte Carlo variasi menjadi sangat berkesan apabila bentuk fungsi gelombang uji dipilih dengan teliti, mengurangkan ralat yang timbul daripada pendekatan rawak yang dibuat.

5.2.2 Simulasi Monte Carlo

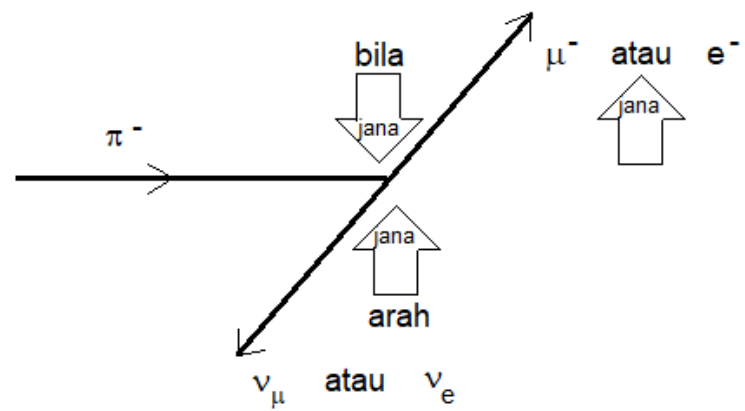
Simulasi sesuatu sistem ialah kamiran pergerakan sistem berkenaan terhadap masa, memberikan evolusinya. Persamaan-persamaan pergerakan biasanya berbentuk persamaan pembezaan terhadap masa. Kamiran terhadap masa memberikan nilai kedudukan dan sebagainya, selepas masa yang dikehendaki.

Guna simulasi stokastik untuk simulasi suatu sistem yang banyak darjah kebebasan atau berdimensi tinggi, atau/dan sistem yang punyai kandungan rawak. Sesetengah sistem misalnya sistem fizik statistik, sistem kuantum, mempunyai persamaan pergerakan yang mengandungi kebarangkalian. Penyelesaian sistem ini biasanya membabitkan penerbitan taburan kebarangkalian untuk keadaan-keadaan akhir. Ini boleh dilakukan menerusi kaedah Monte Carlo – banyak cubaan atau salinan kes penyelesaian dilakukan, dan bagi setiap cubaan itu, apabila kebarangkalian terbabit, satu nilai dipilih menurut kebarangkalian yg diberikan itu (jadi bila dikumpulkan, cubaan-cubaan ini akhirnya memberi taburan kebarangkalian tersebut).

Bila pergerakan ditentukan kebarangkalian di sebilangan tahap – kaedah ini menghasilkan lipatan kebarangkalian. Di setiap tahap, nilai rawak dijana menurut kebarangkaliannya pada tahap itu dalam sistem. Ia setara dengan kamiran terhadap sebilangan ‘cubaan’ untuk memberikan taburan kebarangkalian yang memerihalkan tahap berkenaan. Jumlah jujukan ‘cubaan’ di tahap berurutan memberikan taburan kebarangkalian akhir, iaitu lipatan kebarangkalian tahap-tahap berlaku.

Contoh, pertimbangkan simulasi Monte Carlo berikut untuk reputan pion bercas negatif, π^- , yang bergerak dengan halaju 1×10^9 meter sesaat katakan, dalam arah tertentu. Ia mereput dengan masa hayat 2.6×10^{-8} saat, kepada muon μ^- dan neutrino muon ν_μ (99.99 %) atau kepada elektron e^- dan neutrino elektron ν_e (0.01 %). Pada tahap pertama, kita jana nilai rawak untuk masa reputan, dengan taburan eksponen negatif dengan masa hayat yang diberikan. Masa ini memberikan jarak pion telah bergerak sebelum mereput. Kemudian jana nombor rawak untuk membuat pilihan di antara dua saluran reputan, menurut kebarangkalian diberikan. Kemudian, pilih arah rawak zarah reputan, samada muon atau elektron, dikeluarkan. Keabadian momentum menentukan magnitud momentum

zarah-zarah reputan, dan arah neutrino reputan. Setiap 'cubaan' memberikan satu keadaan akhir zarah reputan. Banyak-banyak cubaan memberikan taburan akhir keseluruhan. Ini ditunjukkan secara skema di bawah.



5.3 Kaedah Metropolis

5.3.0 Asas

Kaedah Metropolis menggunakan rantai Markov. Ia sebenarnya penyampelan kepentingan, iaitu keadaan dalam jujukan dijana mengambilkira nisbah kebarangkalian.

Ia boleh diwakiliscuatu persamaan induk:

$$\rho(X, t + 1) - \rho(X, t) = -\sum_{X'} T(X \rightarrow X')\rho(X, t) + \sum_{X'} T(X' \rightarrow X)\rho(X', t)$$

di mana

$$\rho(X, t) = \text{kebarangkalian berlaku } X \text{ pada masa } t.$$

Pada taburan pegun, $\rho(X, t+1) = \rho(X, t)$.

iaitu

$$\sum_{X'} T(X \rightarrow X')\rho(X, t) = \sum_{X'} T(X' \rightarrow X)\rho(X', t).$$

Satu penyelesaian ialah,

$$T(X \rightarrow X')\rho(X) = T(X' \rightarrow X)\rho(X').$$

Persamaan ini mewakili apa yang disebut keseimbangan terperinci.

Boleh digunakan

$$T(X \rightarrow X') = w_{XX'} A_{XX'}$$

dengan $w_{XX'}$ bersimetri; dalam selang $[0,1]$; $S_{X'} = 1$. $A_{XX'}$ ialah kebarangkalian penerimaan. Jadi,

$$\frac{A_{XX'}}{A_{X'X}} = \frac{\rho(X')}{\rho(X)}.$$

5.3.1 Algoritma

Demikian ialah algoritma bagi kaedah Metropolis:

- Jana keadaan baru X' menggunakan $w_{XX'}$
 - kebarangkalian langkah cubaan
- Tolak/terima menggunakan $A_{XX'}$
 - terima dgn kebarangkalian $\rho(X')/\rho(X)$; 1 jika $\rho(X') > \rho(X)$

Untuk memperolehi ensembel kanunan sesuatu sistem, guna faktor Boltzmann,

$$\rho(X) \propto \exp[-\beta E(X)]$$

di mana E ialah tenaga, dan

$$\beta = 1/(k_B T)$$

ialah suhu songsangan, dengan k_B pemalar Boltzmann, dan T suhu. Dengan itu, keadaan yang paling berkebarangkalian ialah yang dengan paling rendah E . Maka kaedah Metropolis mengevolusi sistem ke arah keadaan E terendah, dengan kadar tumpuan β . Jika $E(X) = E_1(x_1) + E_2(x_2) + \dots$ iaitu hasil tambah tenaga-tenaga mikrokeadaan,

$$P(x_i) \propto \exp[-\beta E(x_i)]$$

jika yang lain tak berubah. Jadi

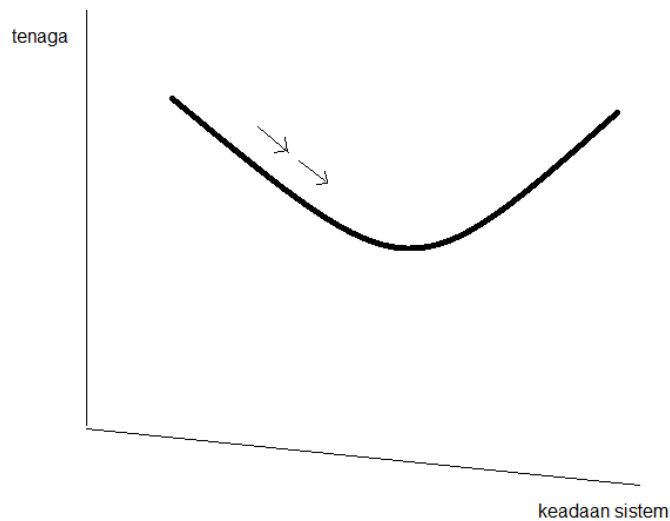
$$\rho(X')/\rho(X) = \rho(x_i')/\rho(x_i) = \exp(-\beta \Delta E_i).$$

Perubahan sistem diberi kesan jumlah perubahan mikrokeadaan secara individu.

5.3.2 Isu

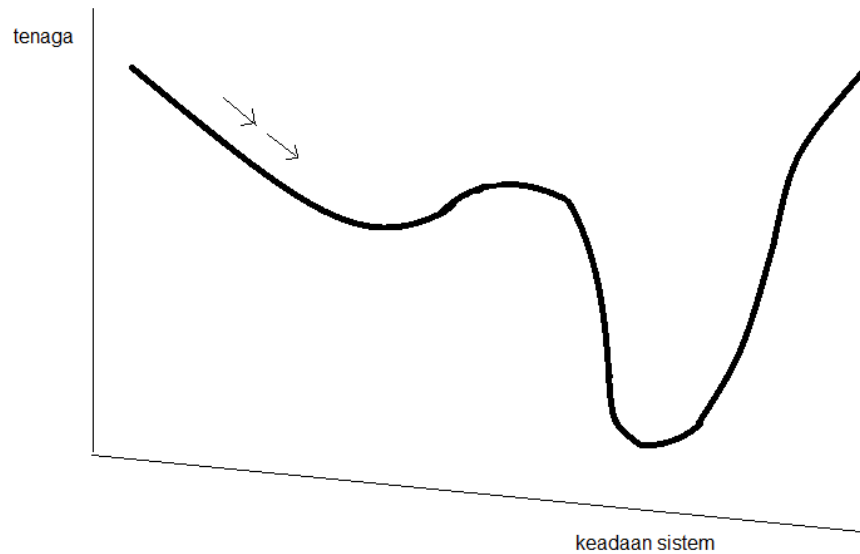
Ada beberapa isu yang timbul dengan kaedah Metropolis ini. Untuk menghargai ini, mari kita fahami dinamik kaedah ini.

Setiap langkah kaedah Metropolis menjada keadaan mengikut kebarangkalian yang berkadaran dengan $\exp[-\beta E(X)]$. Ini bermakna, lebih mungkin ia berubah kepada keadaan dengan E yang lebih rendah. Bahkan, bila $T \rightarrow 0$, ataupun $\beta \rightarrow \infty$, ia semestinya berubah kepada keadaan sedemikian. Maka dinamiknyadalam ruang keadaan sistem, menurun dalam ‘lanskap’ tenaga, seperti dalam rajah:



Bila lanskap tenaga lebih kompleks dan tidak semudahnya mencembung, seperti contoh di bawah, jujukan keadaan terjana mungkin tidak sampai kepada minimum tenaga sejagat seperti yang dikehendaki, tetapi terlekat dalam minimum tempatan. Ini terpakai terutama untuk $T = 0$. Lihat rajah di bawah.

Jika minimum sejagat yang dicari, dan T boleh dipilih, maka protokol sepuhlindah tersimulasi boleh digunakan. Mula-mula T disetkan tinggi, yang membolehkan keadaan berkebarangkalian memanjat cerun E , supay dapat mengatasi batas di antara minimum, dan kemudian perlahan-lahan dikecilkan. (Ini seperti proses sepuhlindap dalam fizik bahan).



Kemudian, ada fenomena pemerlahanan gentingan. Pada keadaan-keadaan yang menghampiri keadaan genting, sistem yang mengalami usikan kecil mengambil masa yang lama untuk kembali ke keadaan kesimbangan. Kecerunan tenaga rendah. Kestabilan sistem melemah apabila ia menghampiri kegentingan. Dengan kaedah Metropolis, keadaan-keadaan yang diterokai hanya yang berhampiran keadaan semasa, jadi kecekapan kaedah ini meneroka ruang kemungkinan yang besar menjadi perlahan dan kuang cekap.

Bagi sistem tak teratur dengan ketakteraturan lindap-kejut (ketakteraturan yang beku terhadap masa), janaan sebilangan replika sistem dibuat untuk mendapat nilai jangkaan, menerusi pemurataan.

5.4 Beberapa Sistem Statistikan

5.4.0 Asas

Guna algoritma Metropolis untuk mensimulasi sistem.

5.4.1 Model Gas Ekatom

Dalam pengiraan tatarajah, tiada pertimbangan dinamik dibuat.

Guna kebarangkalian menurut tenaga tatarajah. Optimumkan tatarajah terhadap tenaga. Suatu langkah cubaan membabitkan satu atom, yang dialihkan ke kedudukan tertentu dalam ruang tertentu. Langkah itu diterima atau ditolak menurut kebarangkalian daripada faktor Boltzmann.

5.4.2 Model Ising

Ini terdiri daripada nsembel darjah kebebasan spin (misalnya atas kekisi) yang bersalingtindak sama sendiri (misalnya jiran terdekat) dan (mungkin ada) medan luar,

$$H = -J \sum_{\langle \alpha \beta \rangle} S_{\alpha} S_{\beta} - B \sum_{\alpha} S_{\alpha}$$

Tatarajah spin yang optimum terhadap tenaga dicari. Langkah cubaan dibuat: pilih tatarajah X' yang berlainan 1 spin sahaja (dengan kebarangkalian seragam di antara spin berlainan). Terima atau tolak langkah ini menurut kebarangkalian daripada faktor Boltzmann.

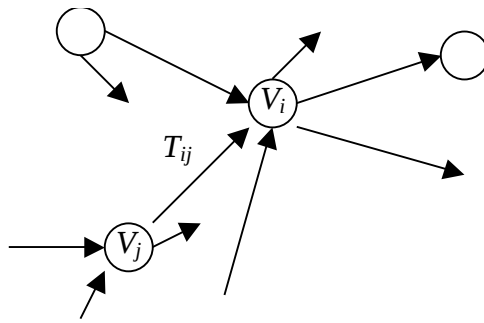
5.4.3 Rangkaian Neuronan

Modelkan neuron sebagai unsur McCulloch-Pitts – iaitu unsur dedua berambang: $V_i \in \{0,1\}$, dengan $V_i := 1$ (menembak) jika masukan h_i lebih besar daripada nilai ambang U_i , ataupun $h_i - U_i > 0$, dan $V_i := 0$ (dorman) jika sebaliknya. Masukan terhasil daripada jumlah keaktifan neuron lain, masing-masing dikadarkan dengan kekuatan sinaps T_{ij} , iaitu $h_i = \sum_j T_{ij} V_j$. Jadi, dengan suatu ukuran masa t dan dgn τ ‘masa refraktori’ neuron, dinamik neuron diberikan

$$V_i(t+\tau) = \theta(\sum_j T_{ij} V_j(t) - U_i)$$

di mana θ ialah fungsi tangga Heaviside: $\theta(x)=1$ jika $x>0$ dan $\theta(x)=0$ jika $x<0$.

Dalam rangkaian neuron, T_{ij} dan U_i diberi, dan perlu diselesaikan dinamik neuron untuk semua N neuron ($i, j = 1, \dots, N$). Ini merupakan penyelesaian serentak N persamaan berganding.



Dalam model Little-Hopfield, dengan kehendak sambungan bersimetri, $T_{ij} = T_{ji}$, dan tiada swasambungan, $T_{ii} = 0$, boleh di tuliskan suatu fungsi Liapunov yang menurun secara ekanada terhadap dinamik neuron:

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j T_{ij} V_i V_j + \sum_i U_i V_i,$$

iaitu,

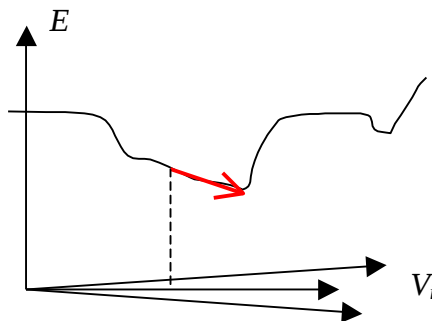
$$\Delta E = -\left(\sum_j T_{ij} V_j - U_i \right) \Delta V_i$$

Semak 4 kemungkinan:

$V_i(t)$	$\sum_j T_{ij} V_j(t) - U_i$	$V_i(t+\tau)$	ΔE
0	<0	0	0 (V_i tak berubah)
0	>0	1	Negatif
1	<0	0	Negatif
1	>0	1	0 (V_i tak berubah)

Lihat bahawa dinamik keseluruhan rangkaian neuronan boleh diperihalkan sebagai perubahan keadaan di mana E menurun.

Lakaran ‘landskap tenaga’ yang menunjukkan dinamik ini adalah seperti berikut:



Keadaan stabil sepadan dengan keadaan dengan E minimum.

Sistem rangkaian neuron ini ada kesamaan dengan sistem spin seperti model Ising. Keadaan neuron sepadan dengan keadaan spin, dan fungsi Liapunov sepadan dengan tenaga tatarajah. Kekuatan sambungan sinaps setara dengan keupayaan tukarganti spin, sementara nilai ambang setara dengan keupayaan luar.

Ada kegunaan rangkaian neuronan ini. Ia boleh bertindak sebagai ingatan bersekutu atau ingatan beralamatkan isi dengan preskripsi Cooper-Hopfield iaitu:

$$T_{ij} = \sum_r \xi_i^{(r)} \xi_j^{(r)}$$

(dgn $U_i = 0$) di mana

$$\xi_i^{(r)} = 2(V_i^{(r)} - 1)$$

dari imej terstor $\{\dots, V_i^{(r)}, \dots\}_r$. Masukan atau keadaan awal yang hampir menyerupai suatu imej terstor mengembalikan (memberikan keadaan akhir stabil) imej berkenaan.

Ia juga boleh melakukan pengoptimuman kombinatorik. Masalah kombinatorik membabitkan pilihan terhad, dan pengoptimuman ialah pemilihan pilihan-pilihan ini yang meminimumkan suatu 'fungsi kos'. Untuk menggunakan rangkaian neuronan untuk pengoptimuman kombinatorik, petakan pilihan kepada V_i , dan samakan fungsi kos kepada E . Dengan itu dapatkan T_{ij} dan U_i . Cari penyelesaian (keadaan terbaik/optimum; fungsi kos terendah) dengan menjalankan rangkaian neuronan dengan nilai-nilai ini. Keadaan terakhir (stabil) mengandungi nilai-nilai V_i yang memberikan pilihan optimum. Ingatan bersekutu juga sebenarnya boleh dilihat sebagai pengoptimuman kombinatorik: pilihan storan yang paling hampir.

Masalah dengan kaedah ini ialah rangkaian neuronan boleh terlekat dalam minimum E tempatan (bukan minimum sejagat yang dikehendaki). Ini boleh diselesaikan menggunakan sepuh lindap tersimulasi (beri 'haba'), atau kaedah lain seperti penerowongan tersimulasi, dan sebagainya.

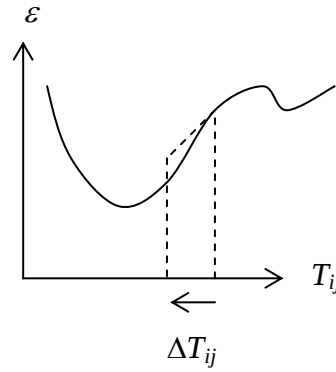
Satu lagi senibina rangkaian neuronan yang boleh diselesaikan ialah rangkaian neuron berlapisan, di mana neuron dikumpulkan ke dalam lapisan-lapisan $L = L_0, \dots, L_{\max}$ dan sambungan hanya dari satu lapisan ke lapisan seterusnya, iaitu $T_{ij} \neq 0$ hanya jika $i \in L, j \in L-1$ (suap ke hadapan). Dalam kes ini, rangkaian neuron melakukan pemetaan dari satu keadaan (lapisan pertama ('masukan'), $\{V_k; k \in L_0\}$) kepada satu keadaan lain (lapisan terakhir ('keluaran'), $\{V_i; i \in L_{\max}\}$). Ada teorem yang menyatakan rangkaian neuronan dengan 3 lapisan cukup untuk mewakili apa-apa fungsi (diberi neuron yang cukup). Pemetaan yang dilakukan bergantung kepada nilai-nilai T_{ij} .

Pemetaan yang dikehendaki boleh diaturcarakan dengan menentukan nilai-nilai T_{ij} yang memberikannya. Sebagai pilihan, rangkaian boleh pelajari pemetaan yang dikehendaki menerusi mislanya rambatan baik ralat. Pembelajaran ialah pengubahsuaian T_{ij} supaya sesuatu pemetaan diwakilkan.

Pembelajaran dari misalan ialah di mana diberi set misalan positif masukan-keluaran yang dikehendaki $\{(\{V_k\}, \{V_i\})^{(r)}\}$, T_{ij} diubahsuai untuk 'menghafal' set ini, dan juga memberikan keluaran yang betul untuk masukan yang baharu yang serupa. Kebetulan keluaran diukur oleh ralat,

$$\varepsilon^{(r)} = \sum_i (V_i - V_i^{(r)})^2$$

iaitu bilangan bit keluaran yang berbeza daripada yang dikehendaki, di mana keluaran V_i terhasil daripada masukan $V_k^{(r)}$. Peminuman ralat boleh dilakukan menerusi kaedah Newton-Ralphson ataupun turun cerun, seperti dalam rajah berikut.



Ubah

$$\Delta T_{ij} = -\eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial T_{ij}}$$

di mana η mewakili “kadar pembelajaran” dan $j \in L_{\text{maks}}-1$. Menggunakan hukum rantai,

$$\Delta T_{ij} = -\eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial T_{ij}} = -2\eta \cdot (V_i - V_i^{(r)}) \cdot g'(h_i) \cdot V_j$$

di mana kita guna persamaan neuron termodifikasi $V_i = g(h_i)$ dengan g selanjut supaya boleh dibezakan, dan $h_i = \sum_j T_{ij} V_j$ iaitu U_i telah dianggap sifar. Jika $g(x)$ dipilih sebagai $1/(1+\exp(-\alpha x))$ (θ diperolehi bila α menghampiri infiniti), maka $g'(x) = \alpha g(x) (1 - g(x))$. Rambat balik ralat ke lapisan sebelum ini (katakan 3 lapisan sahaja):

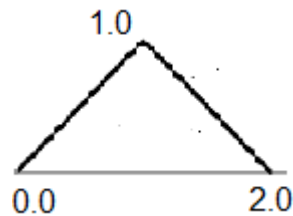
$$\Delta T_{jk} = -\eta \sum_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial V_j} \frac{\partial V_j}{\partial T_{jk}} = -2\eta \cdot \sum_i (V_i - V_i^{(r)}) \cdot g'(h_i) \cdot T_{ij} \cdot g'(h_j) \cdot V_k^{(r)}$$

dengan $h_j = \sum_k T_{jk} V_k^{(r)}$.

Rangkaian neuronan dievolusi menurut kaedah Metropolis. Di setiap langkah masa, pilih neuron, dan kemaskini keadaanya. Pembelajaran juga boleh dibuat menurut Metropolis: pilih pasangan masukan-keluaran dan ubahsuai T_{ij} menurut rambatan balik ralat.

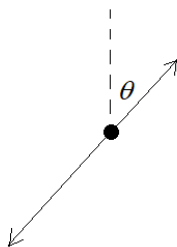
Tugasan 9

1. Guna masa komputer (misalnya `time.time()` dalam Python) – misalnya tiga digit terakhir mikrosaat dibahagi 1000 untuk menjana nombor rawak dalam selang $[0,1]$. Uji kerawakan dan kepincangan dengan memplot purata n nombor dalam jujukan lawan n . Uji korelasi dua nombor berturutan dengan memplot kordinat (x,y) daripada dua nombor sebegini dalam rajah dua dimensi.
2. Ulang (1) tapi jana nombor rawak sebegini: mula dengan suatu integer 6 digit yang dipilih rambang. Ambil 3 digit terkecil dibahagi 1000 sebagai nombor rawak. Kuasaduakan 3 digit integer ini dan ulang.
3. Guna kaedah penerimaan-penolakan untuk menjana nombor rawak bertaburan seperti berikut:



Guna pasangan nombor rawak seragam (`random.random()` dalam Python) dari selang $[0,1]$ dan $[0,2]$; plot histogram bagi taburan ini (`matplotlib.pyplot.hist()` dalam Python). Daripada nisbah bilangan janaan diterima, kira nisbah luas segitiga berbanding empatsegi 1.0×2.0 , dan dengan itu, luas tigasegi.

4. Dalam suatu alam 2 dimensi, suatu kumpulan zarah A pegun dalam medan magnet malar, mereput kepada B dan C 70% masa, dan kepada $2D$ 30% masa. Jisim C ialah dua kali ganda jisim B . Reputan jenis pertama berlaku dengan kebarangkalian berkadaran $\exp(-\theta)$ di mana θ adalah sudut antara C dan arah medan magnet. Reputan jenis kedua bersifat isotrop. Plotkan taburan momentum lawan sudut dari arah medan magnet, bagi zarah-zarah hasil reputan. (Katakan $E^2 = p^2 + m^2$ dalam alam ini; E tenaga, p momentum, m jisim; gunakan keabadian tenaga dan keabadian momentum)



[1. Jana nombor rawak untuk memilih jenis reputan mengikut kebarangkalian. 2. Jana arah reputan menurut jenis reputan. 3. Kira momentum hasil reputan. 4. Masukkan ke dalam taburan.]

Tugas 10

1. Tulis aturcara untuk memodel perjalanan rawak dalam satu dimensi: pada setiap langkah masa, bergerak ke kiri atau ke kanan satu jarak tetap. Plot jarak dari titik asal lawan masa. Betulkah ia berbentuk $\sqrt{N}$?
2. Di atas kekisi 100×100 , letakkan aktifkan (letak=1) nod, dengan kebarangkalian p .
Cari kelompok nod-nod aktif:
Pilih satu nod yang belum berada dalam mana-mana kelompok
Beri nombor kepada kelompok ini; tandakan nod tadi dengan nombor kelompok
Untuk setiap nod aktif berjiranan yang belum bertanda:
Lakukan serupa
Kira saiz purata kelompok-kelompok.
Plot bilangan kelompok lawan p , dan saiz kelompok lawan p .
Adakah perubahan fasa?
3. Untuk suatu model cerucuk pasir sangat mudah dalam 1 dimensi:
Ada 10 ruang.
Pilih suatu ruang rawak. Jatuhkan satu biji pasir di situ.
Jika ruang itu punyai 0 biji pasir, yang 1 itu ditambah, menjadi 1
Jika ruang itu punyai 1 biji pasir, ia menjadi 2, dan runtuh, mengalihkan 1 biji pasirnya kepada setiap jiran
Jiran-jiran pun mengikuti peraturan yang sama, dan seterusnya.
Biji pasir di ruang 0 dan 11 menghilang.
Simulasi model ini, dengan mengira runtuh (bilangan biji pasir yang bergerak setiap kali) lawan berapa kali jatuhnya pasir.
Plot.

:

-

Tugas 11

1. Ada unsur-unsur spin, $S_{ij} \in \{-1, +1\}$ di atas satu kekisi 2 dimensi $N \times N$ diindeks i, j . Hamiltonian sistem ini ialah $H = -J \sum_{\text{jiranterdekat}} S_{ij} S_{i'j'} - B \sum_{i,j} S_{ij}$ di mana jiranterdekat bermakna $|i'-i| \leq 1$ dan $|j'-j| \leq 1$. Gunakan kaedah Metropolis untuk mensimulasi evolusi sistem ini:
 - mula dengan keadaan spin rawak
 - ulang berterusan ($t = 0, 1, 2, \dots$):
 - ulang $N \times N$ kali:
 - pilih i, j rawak
 - kira $\exp(-\beta \Delta H_{ij}) \equiv P$, iaitu bagi ΔH jika S_{ij} diterbalikkan nilainya
 - terbalikkan S_{ij} kalau $P > r$, dan, jika tidak, terbalikkan dengan kebarangkalian P (jana nombor rawak seragam antara $[0, 1]$, terbalikkan S_{ij} bila nombor ini kurang drp P)

Untuk $N = 10$ dan untuk $N = 100$; untuk beberapa nilai J , B dan β yang munasabah:

- Kira dan plot tenaga H pada setiap t .
- Kira kemagnetan $M \equiv \frac{1}{N^2} \sum_{ij} S_{ij}$.

Komen tentang ada/tiada perubahan fasa.

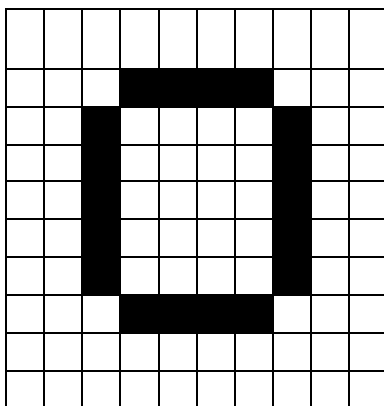
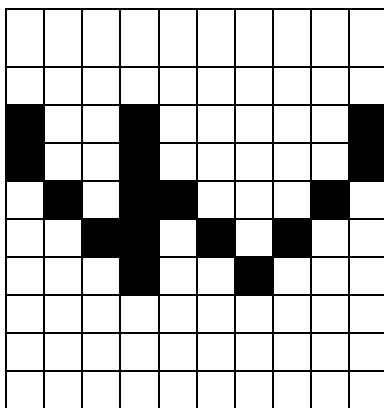
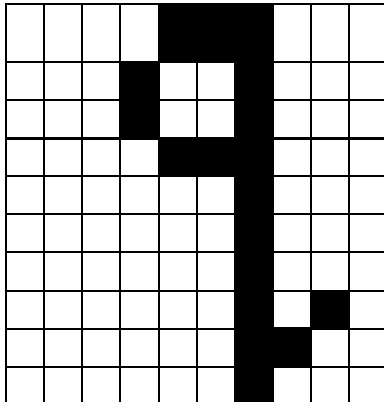
•

2. Simulasikan rangkaian Little-Hopfield dengan $N = 100$ neuron:
 - awalkan T_{ij} dengan nombor rawak seragam dalam selang $[-2.0, 2.0]$ (andaikan U_i semua sifar), dengan memastikan $T_{ij} = T_{ji}$ dan $T_{ii} = 0$
 - mula dengan V_i rawak
 - untuk setiap langkah masa, kemaskini keadaan N neuron dipilih satu persatu secara rawak secara seragam, dikemaskini menurut hukum dinamik neuron
- Untuk beberapa pilihan T_{ij} dan V_i awal:
- Berikan V_i pada setiap masa.
 - Plotkan nilai fungsi tenaga/Liapunov terhadap masa.

3. Katakan kita atur 100 neuron ke dalam bentuk 10×10 untuk berikan imej:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	...								
...									
71									
81									
91									

Utk imej $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ dan $\xi^{(3)}$ seperti berikut:



Kira nilai-nilai T_{ij} menurut preskripsi Cooper-Hopfield.

Kira dan plotkan imej-imej daripada keadaan neuron-neuron bila rangkaian neuron menggunakan T_{ij} ini dijalankan, bagi beberapa imej awal.

- Simulasi satu rangkaian neuronan berlapis suap ke hadapan dengan 100 neuron masukan, 10 di lapisan 'tersorok' (tengah) dan 3 di lapisan keluaran. Neuron masukan dikaitkan dengan neuron dalam imej 10×10 seperti dalam (3.), dan 3 neuron keluaran setiapnya dilabel 'q', 'w' dan 'o'.

Lakukan pembelajaran menggunakan rambatan balik ralat utk mengaitkan masukan imej kepada hurufnya, dengan menjalankan beberapa ratus kali pusingan.

Selepas itu, uji 'hafalan' sistem anda: adakan ia memberikan keluaran yang sepatutnya bagi 3 imej yang dipelajari itu, dan uji 'itlakan'nya – sambutannya kepada imej-imej yang tidak dipelajarinya.