Sementara daya nukleus kuat, daya nukleus lemah dan daya keelektromagnetan diperihal baik oleh teori medan kuantum, graviti belum sebegitu. Bahkan graviti diterangkan dengan baiknya oleh teori kerelatifan am. Teori medan kuantum terbit daripada gabungan teori kuantum dan kerelatifan am. Ia bersifat kuantum. Daya terakibat daripada tukarganti zarah maya. Walhal, kerelatifan am ialah teori berlandaskan geometri. Daya terakibat daripada kelengkungan ruangmasa.

Kerelatifan am memberi pemerihalan sangat baik untuk graviti. Namun adalah semulajadi untuk mencuba mencari teori kuantum untuk graviti. Ini belum menemui kejayaan sebenar lagi.

11.1 Graviti Newton

Newton telah menyatukan graviti bumi dengan graviti langit. Pergerakan mengorbit tidak lebih daripada pergerakan jatuhan. Hukum Newton untuk graviti di antara dua objek berjisim m_1 dan m_2 berjarak *r* di antaranya, daya

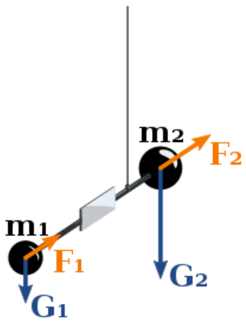
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dengan *G* sebagai pemalar graviti Newton. Jisim menentukan kekuatan salingtindak sesuatu objek itu, semacam cas untuk graviti. Hukum ini terpakai untuk objek di bumi dan juga objek di langit. Pergerakan objek-objek langit boleh difahami sebagai akibat graviti.

11.2 Prinsip kesetaraan

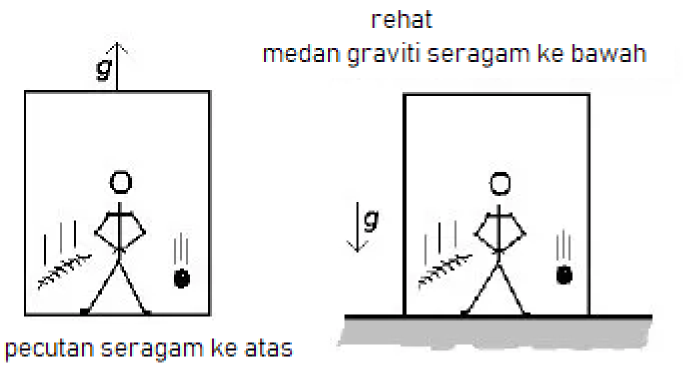
Menariknya, 'jisim' yang digunakan dalam persamaan graviti Newton dianggap sama dengan 'jisim' yang digunakan dalam persamaan dinamik Newton, *F* = *ma*. Jisim dalam hukum dinamik ialah perkadaran pecutan sesuatu objek dikenakan suatu daya, sementara yang dalam hukum graviti ialah kekuatan pengaruh graviti atas objek tersebut.

Kesetaraan jisi graviti dengan jisim inersia boleh diuji dalam eksperimen Newton, di mana bandul sama panjang dengan bahan berlainan digunakan. Kala bandul-bandul ini berkadaran dengan √(jisim inersia/jisim graviti), dan tiada perbezaan dikesan. Eksperimen yang lebih jitu ialah eksperimen Eotvos, yang mengukur kilasan akibat kesan kombinasi daya emparan akibat pergerakan bumi dan daya graviti dengan bumi dua objek berlainan bahan.



Eksperimen Eotvos. Cermin mengukur kilasan bila F_1/F_2 *tak sama* G_1/G_2.

Keseteraan jisim graviti dengan jisim inersia disarankan oleh ‘prinsip kesetaraan’. Prinsip kesetaraan bermakna pecutan gravitian itu sama untuk semua objek walau berlainan jisim, dan dengan itu kumpulan objek-objek yang memecut pada kadar sama, adalah seperti merasai satu daya graviti yang sama. Ini bermakna daya graviti boleh digantikan dengan bingkai rujukan yang memecut.



Kesetaraan bingkai dipecut dan bingkai dalam graviti.

Secara tepat, formulasi Prinsip Kesetaraan oleh Weiberg adalah seperti berikut:
Pada setiap titik ruang-masa, adalah mungkin untuk memilih suatu “sistem kordinat yang inersiaan secara tempatan” yang mana, dalam rantau yang cukup kecil sekeliling titik tersebut, hukum-hukum alam adalah dalam bentuk yang sama seperti dalam sistem kordinat Kartesan yang tak memecut, tanpa graviti.

11.3 Kelengkungan ruang-masa

Bingkai yang memecut, bila dilihat pada pensekitaan masa, merupakan siri bingkai-bingkai dengan halaju relatif berbeza. Menurut kerelatifan khusus, pada bingkai rujukan dengan halaju relatif v, berlaku pengecutan ruang,

$$dx = \frac{1}{\gamma(v)} dx_0$$

di mana

$$\gamma(v) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

dan pengembangan masa,

$$dt = \gamma dt_0.$$

Pengecutan ruang dan pengembangan masa berbeza akibat pemecutan, di bingkai-bingkai berjiranan, membawa kepada ruang-masa yang melengkung. Maka daya graviti, yang boleh dilihat sebagai akibat bingkai memecut, boleh dilihat sebagai akibat kelengkungan ruang-masa.

Kelengkungan ruang-masa berkordinat x^μ, μ=0,1,2,3 untuk dimensi 4, diperihalkan oleh metriknya $g_{\mu\nu}$. Unsur jarak $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, dengan penggunaan kelaziman hasiltambah indeks yang berulang, yang bermakna $ds^2 = \Sigma_\mu\Sigma_\nu g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dx^0dx^0 + g_{01}dx^0dx^1 + \ldots + g_{10}dx^1dx^0 + \ldots + g_{33}dx^3dx^3$. Untuk ruang datar dimensi 3,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i,j = 1,2,3, mewakili *x*, *y*, *z*, ini mengembalikan jarak seperti diberikan teorem Pythagoras, $ds^2 = (dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2$. Untuk ruang-masa dimensi 4 datar,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

menurut suatu kelaziman, dan

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

menurut suatu kezaliman lain, yang tidak mengubah asas fizik, yang kini kita pilih, supaya konsisten dengan apa yang kita gunakan sebelum ini. Ini memberikan $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$, dengan x^0 sebagai masa *t*, iaitu unsur jarak dalam kerelalifan. Nilai metrik menentukan bagaimana teorem Pythagoras tidak dipatuhi dan dengan itu bagaimana ruang-masa terlengkung.

11.4 Tensor

Tensor adalah generalisasi skalar (dimensi 0) dan vektor (dimensi 1). Untuk dimensi 2 dan lebih, ruang mungkin melengkung, dan ini diparameterkan oleh metrik ruang berkenaan. Untuk menentukan ungkapan yang betul bagi jarak, kita perlu namakan dua jenis vektor, vektor kovarian dan vektor kontravarian. Hasildarab skalar di antara unsur dua jenis vektor ini yang menghasilkan unsur jarak, dengan metrik tersirat dalam hubungan antaranya.

Secara formal, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dx_\nu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu$, yang menunjukkan protokol menurunkan indeks menerusi $g_{\mu\nu}$. Begitulah $g^{\mu\nu}$ digunakan untuk menaikkan indeks $g^{\mu\nu}dx_\mu = dx^\nu$. x_μ dinamakan vektor kovarian, sementara x^μ vektor kontravarian. Vektor kovarian dan vektor kontravarian saling melengkap, dihubungi oleh metrik. Perhatikan bahawa metrik $g_{\mu\nu}$ perlu bersimetri dan perlu bukan singular (boleh disongsangkan). $g_{\mu\nu}$ merupakan fungsi kedudukan.

Perhatikan bahawa perubahan kordinat dalam ruang yang sama boleh memberikan metrik berlainan. Misalnya, kordinat Kartesan dan kordinat sferaan, walau memerihalkan ruang datar yang sama. Metrik bagi kordinat Kartesan dalam ruang datar 3 dimensi adalah seperti g_{ij} yang diberikan di atas. Bagi kordinat sferaan,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2.$$

Walaupun metriknya berbeza dengan metrik kordinat Kartesan, ia mewakili ruang dengan geometri yang sama, iaitu datar.

Metrik bergantung kepada sistem kordinat yang digunakan. Namun, oleh kerana ds^2 tak varian terhadap perubahan kordinat, $g_{\mu\nu}$ haruslah suatu tensor.

Suatu vektor kontravarian dalam kordinat x^μ dikaitkan dengan bezaan $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$:

$$f \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

dan ini membentuk asas ruang (tangen) berkenaan:

$$v = v^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

Bila asas kordinat berubah, $x^{\mu} \to x'^{\mu}$, kerana

$$\frac{\partial f}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial f}{\partial x^{\nu}}$$

maka

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

memberikan asas baharu dalam sebutan asas lama. Bagi vektor v,

$$v = v^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = v'^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}$$

ataupun

$$= v^{\mu}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = v'^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}.$$

Oleh kerana

$$\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \times \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\sigma},$$

fungsi Kronecker, dan sebagainya, maka

$$v^{\mu}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = v'^{\nu}.$$

Tensor merupakan vektor pangkat tinggi. Transformasi tensor pangkat 2 adalah seperti berikut, menurut transformasi vektor tadi:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = T^{\rho\sigma}$$

dan

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} = T_{\rho\sigma}$$

dan

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} = T^{\rho}_{\sigma}$$

Apabila tensor bercampur pangkat 2 dikecutkan, ia menjadi skalar:

$$T'^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}T^{\nu}_{\rho} = \delta^{\rho}_{\nu}T^{\nu}_{\rho} = T^{\nu}_{\nu} = T^{\mu}_{\mu}$$

Perhatikan:

- jika suatu tensor punyai semua komponen 0 dalam suatu kerangka kordinat, makai a semuanya 0 juga dalam sistem kordinat lain
- jika dua tensor punyai semua komponen sama dalam suatu sistem kordinat, maka ianya juga semua sama dalam sistem kordinat lain

Jadi T = 0 dan S = T merupakan penyataan yang bebas (sistem) kordinat.

11.5 Metrik

Dalam kordinat Kartesan, ruang datar ruang-masa diberikan oleh metrik Minkowski,

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dalam rangka ξ^{α}. Kita mahu amkan

$$ds^2 = -d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} \eta_{\alpha\beta}$$

Pilih

$$ds^2 = -dx^{\mu} dx^{\nu} g_{\mu\nu}$$

di mana metrik $g_{\mu\nu}$ merupakan tensor kovarian pangkat 2. Yakni

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}$$

Semak yang $g_{\mu\nu}$ bertransformasi sebagai tensor.

Perhatikan bahawa g bersifat bersimetri, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Jika dilihat sebagai matriks, $g_{\mu\nu}$ bukan singular (boleh diterbalikkan – semak!) dan mempunyai 3 nilai eigen positif dan 1 nilai eigen negatif.

Prinsip kesetaraan memberikan kelengkungan yang menentukan g. Rangka rujukan yang mana daya graviti telah ditransformasi keluar menurut prinsip kesetaraan (rangka itu rangka memecut setara daya graviti berkenaan) disebut rangka inersiaan. Dalam rangka ini suatu zarah mengalami kejatuhan bebas.

Bagi kejatuhan bebas rangka inersiaan zarah berjisim, vektor tak varian terhadap jarak wajar,

$$\frac{d^2\xi^{\alpha}}{d\tau^2} = 0, \qquad d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

Bila ditransformasikan kepada suatu sistem kordinat sembarangan,

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial\tau}\right) = \frac{\partial\,\xi^{\alpha}}{\partial\,x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

Maka,

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0$$

di mana

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} := \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial\xi^{\alpha}} \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}$$

Ini adalah persamaan gerakan dalam sistem kordinat sembarangan.

Untuk zarah tak berjisim, $d\tau^2 = 0$, jadi gunakan parameter lain, misalnya $\sigma \equiv \xi^{0}$. Manipulasi serupa memberikan

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\sigma^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\sigma} \frac{dx^{\nu}}{d\sigma} = 0$$

Ingat bahawa

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}$$

Oleh itu,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} \frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2\xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}$$

Daripada definisi $\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}$, kita dapati,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho}\eta_{\alpha\beta}$$

Jadi,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu}g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}g_{\rho\nu}$$

Dengan itu,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu}g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}g_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}g_{\rho\lambda} = 2g_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$$

ataupun

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}g^{\nu\sigma}\left\{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right\}$$

Γ ditentukan oleh metrik g.

Dalam had Newtonan, suatu zarah perlahan ($\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$) dalam medan lemah ($g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta} << 1$) yang pegun,

$$\Gamma^\mu_{00} = -\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}$$

dalam ruang-masa Minkowski, iaitu,

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} + O(h^2)$$

ataupun

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}, \qquad \Gamma^0_{00} = 0$$

Ini memberikan persamaan pergerakan

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \text{terma-terma kecil kerana } \frac{dx^i}{d\tau} \text{ kecil (pergerakan perlahan)}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

dan

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$$

Oleh itu, $\frac{dt}{d\tau}$ = pemalar, dan, $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\nabla h_{00}$. Secara klasik, $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi$, jadi $h_{00} = 2\phi$ + pemalar. Syarat sempadan pada ∞ menghendaki $h_{00} = 0$ dan $\phi = 0$ maka $h_{00} = 2\phi$ atau $g_{00} = (1+2\phi)$. Pada permukaan proton, keupayaan gravitian $\phi = 10^{-39}$, permukaan bumi, $\phi = 10^{-9}$, permukaan matahari, $\phi = 10^{-6}$, dan permukaan kerdil putih, $\phi = 10^{-4}$, jadi dalam kes-kes ini graviti Newtonan masih terpakai bagi zarah-zarah perlahan.

11.6 Geometri Kebezaan

Dalam kerelatifan am, diandaikan ruang-masa diperihalkan manifold 4 dimensi dengan metrik Riemannan. Manifold Riemann ialah manifold rata dengan hasildarab terkedalam yang positif, disebut metrik, yang dengan itu selanjar.

Pada satu titik P sembarangan, adalah sentiasa mungkin memilih kordinat ξ^α terhadap kejiranan P di mana

$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ pada P

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} \text{ pada } P$$

jadi $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + O(\xi^2)$ berhampiran P. Sistem kordinat ini merupakan *rangka inersiaan tempatan* pada P, atau *kordinat normal* pada P, atau *ruang tangen* pada P.

Perhatikan bahawa, untuk suatu skalar ϕ, terbitan $\phi_{,\mu} := \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ merupakan (iaitu ia transformasi seperti) suatu tensor kovarian. Namun pembezaan langsung suatu vektor, $v^\mu{}_{,\nu} := \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}$ bukan tensor, apabila disemak transformasinya. Kita mahukan *pembezaan kovarian*, $v^\mu{}_{;\nu} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} v^\rho$, dengan memilih $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ yang menjadikan keseluruhannya berbentuk tensor. Pilihan

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} := \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

tadi sebenarnya memenuhi kehendak ini. Pembezaan kovarian terima sumbangan daripada pembezaan terus terhadap kordinat dipilih, dan sumbangan akibat kordinat yang digunakan.

Perhatikan transformasi $\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}$:-

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v'^\mu}{\partial x'^\nu} &= \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} v^\rho\right) \\
&= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\tau}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} v^\rho\right) \\
&= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial v^\rho}{\partial x^\tau} + \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\tau \partial x^\rho}\right) v^\rho.
\end{aligned}$$

Sebutan pertama dikehendaki tetapi sebutan kedua merupakan lebihan.

Lihat pula transformasi $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$:-

$$\begin{aligned}
\Gamma'^\mu_{\nu\rho} &= \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial \xi^\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho}\right) \\
&= \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\phi}\frac{\partial x^\phi}{\partial \xi^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho}\right) \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\phi}\frac{\partial x^\phi}{\partial \xi^\alpha}\left(\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\kappa}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\kappa}\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho}\right) \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\phi}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho}\Gamma'^\phi_{\tau\kappa} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\rho \partial x'^\nu} \quad .
\end{aligned}$$

Namun

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} = \delta^\mu_\rho,$$

iaitu

$$\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\rho \partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} = -\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x'^\nu \partial x^\kappa} = -\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa},$$

maka

$$\Gamma'^\mu_{\nu\rho} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\phi}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho}\Gamma^\phi_{\tau\kappa} - \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa}.$$

Dengan itu,

$$\begin{aligned}
v'^\mu{}_{;\nu} &:= v'^\mu{}_{,\nu} + \Gamma'^\mu_{\nu\rho} v'^\rho \\
&= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\left[v^\sigma{}_{,\tau} + \Gamma^\sigma_{\tau\chi} v^\chi\right] + \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\tau \partial x^\rho}\right) v^\rho - \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\chi}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\tau \partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\chi}{\partial x^\rho} v^\rho \\
&= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} v^\sigma{}_{;\tau} .
\end{aligned}$$

Hatta $v^\sigma{}_{;\tau}$ adalah tensor. Ia adalah pembezaan kovarian ke atas v^σ.

Bagi tensor-tensor lain, boleh ditunjukkan yang berikut.

$$a_{\mu;\nu} = a_{\mu,\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} a_\sigma .$$

$$\mathrm{T}^{\tau}_{\mu;\nu} = \mathrm{T}^{\tau}_{\mu,\nu} + \Gamma^{\tau}_{\nu\sigma}\mathrm{T}^{\sigma}_{\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\mathrm{T}^{\tau}_{\sigma}.$$
$$\phi_{;\nu} = \phi_{,\nu}.$$

Boleh disemak bahawa $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$, maka $g_{\mu\nu}$ takvarian terhadap pembezaan kovarian. Juga $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ dalam kordinat normal pada titik *P*, iaitu pembezaan kovarian serupa pembezaan langsung dalam kordinat normal, atau pembezaan kovarian ialah pembezaan langsung dalam ruang tangen.

Di sini kita lihat ciri-ciri pembezaan kovarian.

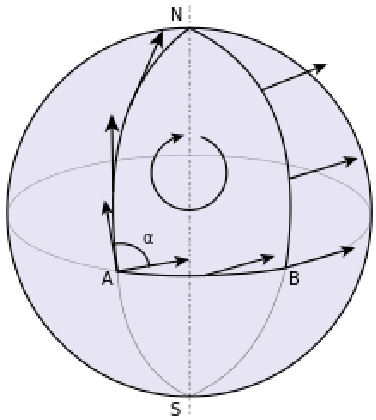
Pembezaan kovarian mengagih, iaitu pembezaan kovarian hasiltambah dua tensor sama dengan hasiltambah pembezaan kovarian masing-masing tensor-tensor berkenaan,
$$(\mathrm{A}^{\cdots}_{\cdots} + \mathrm{B}^{\cdots}_{\cdots})_{;\nu} = \mathrm{A}^{\cdots}_{\cdots;\nu} + \mathrm{B}^{\cdots}_{\cdots;\nu}.$$
Juga, pembezaan kovarian suatu hasildarab memenuhi hukum Leibnitz,
$$(\mathrm{A}^{\cdots}_{\cdots}\mathrm{B}^{\cdots}_{\cdots})_{;\rho} = \mathrm{A}^{\cdots}_{\cdots;\rho}\mathrm{B}^{\cdots}_{\cdots} + \mathrm{A}^{\cdots}_{\cdots}\mathrm{B}^{\cdots}_{\cdots;\rho}.$$

Pembezaan kovarian tidak komut, iaitu $\mathrm{V}^{\rho}_{;\mu\nu} \equiv \mathrm{V}^{\rho}_{;\mu;\nu} \equiv \left(\mathrm{V}^{\rho}_{;\mu}\right)_{;\nu}$ secara umumnya tidak sama dengan $\mathrm{V}^{\rho}_{;\nu\mu}$. Namun pembezaan kovarian komut dengan pengecutan, yakni $\left(\mathrm{T}^{\mu\sigma}_{\mu}\right)_{;\rho}$ (iaitu kecut kemudian beda) sama dengan $\mathrm{T}^{\mu\sigma}_{\mu;\rho}$ (iaitu beda kemudian pecut). Pembezaan kovarian juga komut dengan menaik dan menurun, misalnya jika $\mathrm{T}_{\mu\nu} = \mathrm{a}_{\mu;\nu}$ maka $\mathrm{T}^{\mu}_{\nu} = \mathrm{a}^{\mu}_{;\nu}$ (kerana $\mathrm{g}_{\mu\nu;\rho} = 0$).

Sekarang kita lihat bagaimana kita ukur kelengkungan. Metrik $g_{\mu\nu}$ memberi maklumat kelengkungan, tetapi ia bergantung kepada sistem kordinat yang digunakan. Ia tensor. Ia memberikan ‘sImbol Christoffel’ atau ‘kaitan afin’, $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$, yang seakan tensor tetapi bukan. Adalah mungkin dipilih sistem kordinat tertentu di atas suatu manifold Riemannan yang mana memberikan nilai sifar kepada simbol Christoffel pada suatu titik pilihan. Ini ialah sistem kordinat dibawa oleh jasad dalam jatuhan bebas; simbol Christoffel muncul dalam persamaan geodesik, yang memberikan jejak terpendek dalam ruang melengkung. Simbol Christoffel seakan mewakili kelengkungan ruang masa (misalnya akibat kesan graviti).

Suatu lagi ukuran kelengkungan ialah tensor kelengkungan Riemannan. Tensor Riemannan, atau tensor kelengkungan $\mathrm{R}^{\tau}_{\rho\sigma\mu\nu}$ diberi (“kesetaraan Ricci”),
$$\mathrm{V}^{\rho}_{;\mu\nu} - \mathrm{V}^{\rho}_{;\nu\mu} = \mathrm{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu}V^{\sigma}$$
iaitu ia mengukur betapa tak kalis tukartertibnya pembezaan kovarian dalam ruang berkenaan. Ini kerana, bila ia sifar, ia bermakna pembezaan kovarian sama dengan pembezaan biasa dan ruang berkenaan berisometri atau sama dengan ruang datar, ruang Euklidan.

Pembezaan kovarian berkait dengan pengangkutan selari, iaitu pergerakan suatu vektor di atas suatu lengkung, tanpa mengubah arah vektor tersebut (terhadap arah di dalam ruang tangen kepada permukaan setempat). Dalam ruang datar Euklidan, pengangkutan selari keliling suatu gelung membawa suatu vektor itu kembali bertindih atas diri asalnya, tetapi ini tidak berlaku dalam ruang melengkung Riemannan secara am. Beza arah awal dan akhir vektor tersebut akibat pengangkutan selari atas gelung infinitesimal diberikan oleh kelengkungan Riemann.



Pengangkutan selari suatu vektor di atas permukaan sfera.

Menggantikan untuk $V^{\rho}_{;\mu\nu}$ dan $V^{\rho}_{;\nu\mu}$, kita perolehi,

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^{\rho}_{\tau\nu}\Gamma^{\tau}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\rho}_{\tau\mu}\Gamma^{\tau}_{\sigma\nu}.$$

Tensor kelengkungan Riemann bergantung sepenuhnya ke atas metrik.

Sekarang,

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma}R^{\rho}_{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(g_{\lambda\nu,\kappa\mu} - g_{\mu\nu,\kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa,\nu\mu} + g_{\mu\kappa,\nu\lambda}\right) + g_{\eta\sigma}\left(\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} - \Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\right).$$

Maka, tensor Riemann punyai ciri-ciri:

simetri – $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$

antisimetri – $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}$

kekitaran – $R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0.$

Maka, $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ punyai hanya 20 komponen bebas.

Kelengkungan boleh juga diberikan oleh tensor kelengkungan Ricci,

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu}$$

yang merupakan pengecutan tensor Riemann dalam dua indeksnya. Secara kasar, ia mengukur sejauh mana geometri suatu tensor metrik berbeza setempat daripada ruang datar. Dalam 3 dimensi, tensor Ricci mengandungi maklumat lengkap tentang kelengkungan ruang berkenaan.

Kelengkungan skalar,

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

merupakan ukuran kelengkungan suatu manifold yang tak bergantungkan kordinat.

Satu lagi tensor berguna ialah tensor Weyl,

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\rho\mu}R_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}g_{\rho\nu}R_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}g_{\sigma\mu}R_{\nu\rho} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}R_{\mu\rho} - \frac{1}{6}g_{\rho\nu}g_{\mu\sigma}R + \frac{1}{6}g_{\rho\mu}g_{\nu\sigma}R.$$

Tensor Riemann memuaskan identiti Bianchi,

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0.$$

Ini diterbitkan daripada identiti Jacobi bagi pembezaan kovarian, iaitu,

$$\left[[\nabla_\eta, \nabla_\nu], \nabla_\kappa\right] + \left[[\nabla_\nu, \nabla_\kappa], \nabla_\eta\right] + \left[[\nabla_\kappa, \nabla_\eta], \nabla_\nu\right] = 0$$

di mana ∇_η mewakili perbezaan kovarian terhadap η.

Mengecut dengan identiti Bianchi dengan $g^{\lambda\nu}$ memberikan

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + \mathrm{R}^{\nu}_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0.$$
Ini membabitkan tensor Ricci. Dikecut seterusnya dengan $g^{\mu\kappa}$,
$$R_{;\eta} - \mathrm{R}^{\mu}_{\eta;\mu} - \mathrm{R}^{\nu}_{\eta;\nu} = 0,$$
ataupun,
$$g^{\rho\eta} R_{;\eta} - 2\mathrm{R}^{\rho\eta}_{;\eta} = 0,$$
yakni,
$$\mathrm{G}^{\rho\eta}_{;\eta} = 0$$
di mana
$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$$
adalah tensor Einstein. Perhatikan bahawa $G^{\mu\nu}$ adalah bersimetri, dan
$$g_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -R.$$

11.7 Pengangkutan Selari, Geodesik dan Kelengkungan

Seperti disebut di atas, pembezaan kovarian berkait dengan pengangkutan selari. Dalam pembezaan suatu tensor T, kesan akibat perubahan dalam sistem kordinat harus dibuang daripada perubahan 'sebenar' dalam T. Perubahan 'sebenar' inilah hasil pengangkutan selari.

Pengangkutan selari adalah bergantungkan jejak yang diambil. Begitulah pembezaan kovarian bergantung kepada jejak. Pembezaan kovarian v^{μ} atas suatu lengkung $x^{\mu}(s)$, s nyata, didefinisikan,
$$\frac{Dv^{\mu}(s)}{Ds} := \frac{dv^{\mu}}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{dx^{\rho}}{ds} v^{\sigma}.$$
Ini berbentuk tensor, dan bersetuju dengan definisi pembezaan kovarian seperti di atas, sebelum ini. Begitulah juga,
$$\frac{Da_{\mu}(s)}{Ds} := \frac{da_{\mu}}{ds} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} \frac{dx^{\rho}}{ds} a_{\sigma}.$$
Diberi vektor $A^{\mu}(s_0)$ di atas suatu titik $s = s_0$ di atas lengkung tersebut, definisikan $A^{\mu}(s)$ dengan $\frac{DA^{\mu}(s)}{Ds} = 0$. Maka dikatakan $A^{\mu}(s)$ adalah pengangkutan selari $A^{\mu}(s_0)$ di atas lengkung berkenaan.

Geodesik pula ialah lengkung dengan jarak (diukur metrik) terdekat di antara dua titik diberikan. Ini diperihalkan oleh
$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{dx^{\rho}}{d\tau}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = 0$$
di mana τ mewakili masa wajar (jarak 4 dimensi). Sebagai alternatif, 10itab oleh definisikan geodesik sebagai suatu "garis lurus" dalam ertikata apabila suatu vektor tangen di suatu titik diangkut selari ke titik lain, adalah selari kepada tangen di situ. Untuk suatu 'vektor tangen',
$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial s}$$
maka
$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \frac{dx^{\rho}}{ds}\frac{dx^{\sigma}}{ds}\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = f\frac{dx^{\mu}}{ds}$$
dengan f ditentukan vektor tangen tadi. Kita boleh pilih parameter supaya f hilang, kemudiannya menjadikan $s = a\tau + b$, dengan a dan b pemalar.

Kita boleh kira sisihan geodesik. Bagi dua geodesik berjiranan, $x^{\mu}(s)$ dan $x^{\mu}(s) + \delta x^{\mu}(s)$,

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = 0$$

dan

$$\frac{d^2(x^\mu + \delta x^\mu)}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}(x+\delta x)\frac{d(x^\rho + \delta x^\rho)}{ds}\frac{d(x^\sigma + \delta x^\sigma)}{ds} = 0$$

daripada persamaan geodesik tadi. Kembangkan persamaan kedua sehingga peringkat pertama terhadap δx dan kemudian menolak persamaan pertama daripadanya, kita perolehi

$$\frac{d^2}{ds^2}\delta x^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma,\alpha}\delta x^\alpha \frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} + 2\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = 0$$

yang seterusnya memberikan

$$\frac{D^2}{Ds^2}\delta x^\mu = \mathrm{R}^\mu_{\rho\alpha\sigma}\delta x^\alpha \frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}.$$

Kebolehan mengubah sistem kordinat merumitkan penentuan samada sesuatu ruang itu betul-betul melengkung, atau hanya kelihatan melengkung akibat pilihan kordinat. Suatu metrik $g_{\mu\nu}$ adalah rata atau datar dalam suatu rantau U jika ada kordinat yang boleh dipilih yang memberikan $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ (Minkowski; kordinat ditulis ξ_α) di seluruh U.

Bagi metrik rata, $\mathrm{R}^\mu_{\rho\nu\sigma}$ adalah sifar. Dalam sistem Minkowski ξ_α, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ di keseluruhan U, maka $\mathrm{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0$ di mana-mana. Oleh kerana $\mathrm{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ merupakan tensor, maka $\mathrm{R}^\mu_{\rho\nu\sigma} = 0$ untuk mana-mana sistem kordinat am.

Begitulah, jika $\mathrm{R}^\mu_{\rho\nu\sigma} = 0$, metrik rata. Ini kerana, memilih ξ^α sebagai kordinat normal pada suatu titik dalam U, maka di situ, $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\alpha} = 0$. Oleh kerana $\mathrm{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} - \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma}$, kekangan ke atas $\mathrm{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ dan dengan itu $\mathrm{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta,\varepsilon}$, dan seterusnya, mengekang pula terbitan kedua, ketiga, dan seterusnya, bagi $g_{\alpha\beta}$. Maka $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ bagi titik-titik berdekatan juga.

11.8 Kekovarianan Am

Kesan medan graviti dilihat sebagai merubahkan ruang-masa, menerusi prinsip kesetaraan. Ruang-masa ini diperihalkan oleh metriknya.

Suatu persamaan fizik sah dalam medan graviti jika,

1. ia sah dalam tiada graviti, yakni dalam setiap kerangka Lorentz tempatan pada setiap titik
2. ia *kovarian am*, yakni bentuknya kekal dalam transformasi kordinat am.

DIberi suatu ruang-masa (yang melengkung, atau tidak), adalah sentiasa mungkin untuk memilih kordinat berhampiran titik *P* yang mana di titik *P*, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, dan $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} = 0$.

Contoh bagi elektrodinamik, bentuk kovarian am bagi persamaan Maxwell, $\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = -J^\beta$ dan $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}F_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma}F_{\alpha\beta} = 0$ adalah, $F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = -J^\nu$ dan $F_{\mu\nu;\rho} + F_{\nu\rho;\mu} + F_{\rho\mu;\nu} = 0$. Proses penggantian $\eta_{\alpha\beta}$ dengan $g_{\mu\nu}$ dan ∂_α (ataupun $,\alpha$) dengan ∇_μ (ataupun $;\mu$) dipanggil “gantian minimum”.

11.9 Persamaan Medan Einstein

Graviti membabitkan medan jirim. Kita jangkakan medan-medan ini dan terbitan kovarian berkaitan akan muncul dalam persamaan medan. Medan graviti berbentuk tensor. Kita postulatkan kewujudan suatu tensor bersimetri $T^{\mu\nu}$, "tensor tenaga-momentum", yang bergantung kepada medan-medan ini, terbitan kovarian, dan metrik, yang mana,

1. $T^{\mu\nu}$ menghilang dalam kejiranan U hanya jika medan-medan itu sifar di atas U
2. $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$

Kita bandingkan $T^{\mu\nu}$ dengan $F^{\mu\nu}$. Kita kaitkan ketumpatan tenaga electromagnet dan arus cas elektrik dengan ketumpatan tenaga-momentum dan arus tenaga-momentum. Maka ketumpatan p^{α} dalam sistem zarah-zarah n dengan momentum-4 $p_n(t)$ adalah,

$$T^{\alpha 0}(\mathbf{x},t) := \sum p_n^{\alpha}(t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t))$$

sementara arus p^{α} adalah

$$T^{\alpha i}(\mathbf{x},t) = \sum p_n^{\alpha}(t)\frac{dx_n^i(t)}{dt}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)).$$

Secara am,

$$T^{\alpha\beta}(\mathbf{x},t) = \sum p_n^{\alpha}(t)\frac{dx_n^{\beta}(t)}{dt}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)).$$

Simetri menghendaki

$$p_n^{\beta} = E_n\frac{dx_n^{\beta}}{dt}$$

jadi

$$T^{\alpha\beta}(\mathbf{x},t) = \sum \frac{p_n^{\alpha}(t)p_n^{\beta}(t)}{E_n}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)).$$

Dengan memasukkan kamiran fungsi delta terhadap masa, kita juga boleh tulis

$$T^{\alpha\beta}(\mathbf{x},t) = \sum \int dt'\, p_n^{\alpha}(t')\frac{dx_n^{\beta}(t')}{dt'}\delta^4(x-x_n(t'))$$

dengan argumen fungsi delta berbentuk vektor-4 sekarang. Di bawah transformasi Lorentz, kita pergi ke masa wajar τ, memberikan

$$T^{\alpha\beta}(\mathbf{x},t) = \sum \int d\tau\, p_n^{\alpha}(\tau)\frac{dx_n^{\beta}}{d\tau}\delta^4(x-x_n(\tau)).$$

Ini terdiri daripada vektor x vektor x skalar, maka ia tensor.

Capahan arus,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^i}T^{\alpha i}(\mathbf{x},t) &= -\sum_n p_n^{\alpha}(t)\frac{dx_n^i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x_n^i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t))\\ &= -\sum_n p_n^{\alpha}(t)\frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t))\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}T^{\alpha 0}(\mathbf{x},t) + \sum_n \frac{dp_n^{\alpha}(t)}{dt}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)).\end{aligned}$$

Kita kaitkan

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = G^{\alpha}$$

di mana G^{α} mewakili "ketumpatan daya".

$$G^{\alpha} := \sum_n \delta^3\big(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)\big)\frac{dp_n^{\alpha}(t)}{dt}$$

$$= \sum_n \delta^3\big(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)\big)\frac{d\tau}{dt}F_n^\alpha(t).$$

Untuk memerihalkan graviti menerusi kerelatifan am, kita perlu dapatkan kelengkungan ruangmasa akibat kehadiran jisim (atau jisim-tenaga). Kita mahukan persamaan dinamik bagi $g_{\mu\nu}(x)$. Kita mencari persamaan dengan kekovarianan am (yakni persamaan tensor) yang memberikan graviti Newton dalam had bukan kerelatifan.

Pertimbangkan suatu zarah yang bergerak secara perlahan dalam medan pegun lemah. Perlahan bermakna

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$$

di mana $t = x^0$ dan τ adalah masa wajar seperti biasa. Medan pegun pula bermakna semua terbitan masa $g_{\mu\nu}$ menghilang. Maka

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}.$$

Untuk medan lemah, metrik ruangmasa hampir datar, iaitu

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \qquad h_{\alpha\beta} << 1.$$

Dengan itu, bagi medan lemah,

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu} + O(h^2)$$

yakni

$$\Gamma^i_{00} = +\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \qquad \text{dan} \qquad \Gamma^0_{00} = 0.$$

Persamaan gerakan, daripada jatuhan bebas zarah berjisim seperti didapati dalam bahagian di atas, ialah

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0.$$

Ini memberikan

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

untuk zarah perlahan kerana $\Gamma^i_{0j}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dt}{d\tau}$ kecil, kerana $\frac{dx^j}{d\tau}$ kecil. Jadi

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2.$$

Dan, kerana $\Gamma^0_{00} = 0$,

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$$

yang bermakna $\frac{dt}{d\tau}$ adalah pemalar. Dengan itu, kita perolehi

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\nabla h_{00}.$$

Ini sepadan dengan mekanik Newton,

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi$$

dengan keupayaan (graviti) $\phi = -GM/r$. Ini bermakna $h_{00} = 2\phi +$ pemalar. Dipertimbangkan syarat sempadan, khususnya, pada kedudukan ∞, adalah $h_{00} = 0$ dan $\phi = 0$, menjadikan $h_{00} = 2\phi$. Ini bermakna $g_{00} = -(1+2\phi)$. Jadi dalam keadaan medan rendah dan halaju perlahan, kita perolehi dinamik Newton, dengan nilai g_{00} sedemikian.

Bagi jirim bukan berkerelatifan, $T_{00} \sim \rho$. Bagi keupayaan Newtonan ϕ, $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$. Jadi,

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}.$$

Persamaan ini tidak pun takvarian Lorentz. Namun, kita boleh teka yang persamaan kovarian untuk apa-apa taburan jirim adalah berbentuk

$$X_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

di mana $X_{\mu\nu}$ merupakan tensor, terbina daripada metrik dan terbitan pertama dan keduanya, dengan X_{00} menjadi $\nabla^2 g_{00}$ dalam had Newtonan. Juga, kita tahu yang $T_{\mu\nu}$ bersimetri ($T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$) dan diabadikan ($T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$). Kita perlukan $X_{\mu\nu}$ juga punyai ciri ini, tanpa kira apa metrik. Tensor yang boleh dibina daripada $g_{\mu\nu}$ dan terbitan pertama dan keduanya hanyalah $g_{\mu\nu}$ dan $R_{\sigma\rho\mu\nu}$. Tensor-2 (dua indeks) yang bersimetri hanyalah $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}R$ dan $g_{\mu\nu}$. Satu kemungkinan ialah

$$X_{\mu\nu} = AR_{\mu\nu} + Bg_{\mu\nu}R$$

di mana A dan B adalah pemalar. Maka $X^{\mu}{}_{\nu;\mu} = AR^{\mu}{}_{\nu;\mu} + B\delta^{\mu}{}_{\nu}R_{;\mu}$. Namun, daripada identiti Bianchi, kita tahu

$$2A^{\mu\nu}{}_{;\mu} = g^{\mu\nu}R_{;\mu}$$

ataupun

$$R^{\mu}{}_{\nu;\mu} = ½\, \delta^{\mu}{}_{\nu}R_{;\mu} = ½\, R_{;\nu}.$$

Maka

$$X^{\mu}{}_{\nu;\mu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}\,(½ A + B)\, R_{;\mu} = (½ A + B)\, R_{;\nu}.$$

Untuk $X^{\mu}{}_{\nu;\mu}$ sifar, perlukan samada $½ A + B = 0$ atau $R_{;\nu} = 0$. Tetapi $R_{;\nu} = 0$ mengimplikasikan $\frac{\partial T^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0$, yang tidak umumnya benar, misalnya bagi kes jirim tak homogen bukan berkerelatifan. Maka dengan itu $B = -½ A$, dan $X_{\mu\nu} = A(R_{\mu\nu} - ½ g_{\mu\nu}R) = AG_{\mu\nu}$ di mana $G_{\mu\nu}$ ialah tensor Einstein. Sekarang kita tentukan A dengan mempertimbangkan had Newtonan. Dalam keadaan bukan berkerelatifan, sewajarnya $|T_{ij}| << |T_{00}|$. Maka, $|G_{ij}| << |G_{00}|$, yang bermakna $R_{ij} \cong ½\, g_{ij}R$. Juga, bagi medan lemah $g_{\alpha\beta} \cong \eta_{\alpha\beta}$, $R \cong R_{kk} - R_{00}$, maka $R \cong (3/2)\, R - R_{00}$ iaitu $R \cong 2R_{00}$. Maka

$$X_{00} \cong A\,(R_{00} - ½\, g_{00}R)$$
$$\cong 2AR_{00}.$$

Kita tahu $R_{00} = R^{\mu}{}_{0\mu0}$, dan

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}\right] + \text{sebutan peringkat kedua.}$$

Bagi medan pegun, terbitan masa menghilang, dan $R_{0000} \cong 0$. Juga

$$R_{i0j0} \cong \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}$$

dan

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}$$

maka

$$X_{00} = A\nabla^2 g_{00}.$$

Menghendaki $G_{00} = \nabla^2 g_{00}$ bermakna $A = 1$, memberikan

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Bentuk lain, yang setara, boleh diperolehi dengan mengecutkan persamaan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

dengan $g^{\mu\nu}$, memberikan

$$R - 2R = -8\pi G T^{\mu}_{\mu}$$

dan seterusnya

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda}).$$

Maka dalam ruang kosong,

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Kemungkinan menambahkan pemalar kamiran kepada persamaan medan membolehkan dimasukkan sebutan $\Lambda g_{\mu\nu}$ di sebelah kiri. Λ dikenali sebagai pemalar kosmologi. Untuk kemudahan, dalam banyak analisis, ia dianggap 0.

11.10 Beberapa Penyelesaian

Tensor Einstein $G_{\mu\nu}$ punyai 10 komponen tetapi 4 identiti Bianchi bagi $G^{\mu}{}_{\nu;\mu}$ mengekang bilangan persamaan bebas kepada 6 sahaja. Walaupun kita ada 10 pembolehubah $g_{\mu\nu}$ yang tak diketahui, hanya ada 4 darjah kebebasan. Ini muncul daripada kebebasan membuat transformasi kordinat am,

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} + \xi^{\mu}$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -\,(\,\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu})$$

yakni persamaan medan hanya boleh menentukan metrik sehingga kepada suatu transformasi kordinat am. Bandingkan ini dengan persamaan Maxwell, di mana kita ada 4 yang tak diketahui, A_{μ}, dengan 4 persamaan $\partial^{\mu}F_{\mu\nu} = 0$, tetapi $\partial^{\nu}\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = 0$ mengurangkan bilangan persamaan kepada 3. Satu darjah kebebasan yang baki, yang sepadan dengan transformasi tolok, $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha$. Biasanya, suatu pilihan tolok dibuat untuk menetapkan tolok ini. Suatu kemungkinan ialah syarat kordinat harmonik,

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0.$$

Ada beberapa penyelesaian masyhur bagi persamaan medan Einstein. Penyelesaian-penyelesaian ini biasanya bagi sesuatu keadaan khas.

Suatu penyelesaian bagi $R_{\mu\nu} = 0$ ialah ruang Minkowski, iaitu dengan metrik $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, dengan yang lain 0. Ruang-masa rata.

Satu penyelesaaian yang masyhur ialah penyelesaian Schwarzchild bagi metrik statik yang bersimetri sferaan. Ini pakai bagi bintang yang tak berputar, misalnya.

Mula-mula kita tuliskan bentuk am untuk metrik statik bersimetri sferaan dalam ruang melengkung. Ini bermakna kita jangkakan selang masa wajar $d\tau^2$ tak bergantung kepada t dan hanya bergantung kepada **dx** dan **x** menerusi $\mathbf{dx}^2$, $\mathbf{x.dx}$ dan $\mathbf{x}^2 = r^2$. Maka bentuk paling am ialah

$$d\tau^2 = F(r)\, dt^2 - 2E(r)\, dt\, \mathbf{x.dx} - D(r)\, (\mathbf{x.dx})^2 - C(r)\, \mathbf{dx}^2$$

di mana F, E, D, dan C adalah pelbagai fungsi terhadap r. Dalam kordinat kutub sferaan 3 dimensi,

$$d\tau^2 = F(r)\, dt^2 - 2rE(r)\, dt\, dr - r^2D(r)\, dr^2 - C(r)\, (dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2).$$

Definisikan $t' = t + \phi(r)$, dan mengset $\frac{d\phi}{dr} = -\frac{rE(r)}{F(r)}$ menghapuskan $E(r)$ (dan memodifikasikan $D(r)$). Akhirnya, dengan membiarkan $r'^2 = C(r)\, r^2$, kita perolehi metrik (dengan menggantikan t' dengan t dan r' dengan r)

$$d\tau^2 = B(r)\, dt^2 - A(r)\, dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

yang dikatakan metrik Schwarzchild dalam bentuk piawai.

Kita mencari mencari penyelesaian kepada persamaan $R_{\mu\nu} = 0$ (yakni di luar bintang). Jadi langkah seterusnya kita nilaikan $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ dan $R_{\sigma\mu}$. Gunakan $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right)$ dengan $g_{rr} = A(r)$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$, $g_{tt} = -B(r)$, dan selainnya sifar, yang, disongsangkan, $g^{rr} = 1/A(r)$, $g^{\theta\theta} = 1/r^2$, $g^{\phi\phi} = 1/r^2\sin^2\theta$, $g^{tt} = -1/B(r)$, dan selainnya sifar. $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ yang bukan sifar hanyalah

$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dA(r)}{dr}$, $\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{-r}{A(r)}$, $\Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{-r\sin^2\theta}{A(r)}$, $\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dB(r)}{dr}$,
$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}$, $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}$, $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta$,
dan $\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{1}{2B(r)}\frac{dB(r)}{dr}$. Adalah $R_{\mu\kappa} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\lambda\eta}$, maka
$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{B(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\frac{A'(r)}{A(r)}$,
$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)}\left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) + \frac{1}{A(r)}$,
$R_{\phi\phi} = \sin\theta R_{\theta\theta}$, dan
$R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\frac{B'(r)}{A(r)}$,
dengan komponen-komponen sifar.

Sekarang kita mahu selesaikan persamaan-persamaan $R_{\mu\nu} = 0$. Kita ada syarat sempadan $g_{\mu\nu} \to$ metrik Minkowski, dengan $r \to \infty$. Metrik Minkowski dalam kordinat kutub sferaan ialah

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

jadi syarat sempadan berikan $A(r) \to 1$ dan $B(r) \to 1$ apabila $r \to \infty$. Mula-mula perhatikan bahawa $\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = \frac{-1}{rA}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right)$ jadi jika A dan B bebas, $\frac{A'}{A} = \frac{-B'}{B}$ atau AB = pemalar = 1 katakan. Menggantikan A(r) sebagai 1/B(r) memberikan
$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r + B(r)$ dan
$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}(r)}{2rB(r)}$.
Jadi, jika kita ada $R_{\theta\theta}$ sifar, kita ada $R_{\mu\nu} = 0$. Untuk $R_{\theta\theta} = 0$, dikehendaki $\frac{d}{dr}(r\,B(r)) = 1$. Jadi $rB(r) = r + c$, atau $B(r) = 1 + c/r$. Jika kita mencari penyelesaian untuk medan dengan jisim pusat M maka $g_{tt} \to -1 - 2\phi = -1 + 2Gm/r$ dengan $r \to \infty$. Tetapi $g_{tt} = -B(r)$, jadi $c = -2MG$ dan dengan itu kita perolehi
$B(r) = 1 - \frac{2MG}{r}$ dan
$A(r) = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]^{-1}$, memberikan metrik Schwartzchild,

$$d\tau^2 = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]dt^2 - \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\phi^2$$

bagi ruangmasa kosong statik keliling suatu jisim M, dalam kordinat sferaan.

Penyelesaian Reissner-Nordstrom pula ialah bagi ruangmasa diluar suatu jasad bersimetri sferaan bercas, dengan jisim M dan cas elektrik Q. Metriknya:

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left[1 - \frac{2MG}{r} + \frac{4MGQ^2}{r^2}\right]dt^2 - \left[1 - \frac{2MG}{r} + \frac{4MGQ^2}{r^2}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

dengan penggunaan $A_\mu = (Q/r, \mathbf{0})$.

Suatu penyelesaian, bagi jasad berputar, dengan simetri paksian, disebut penyelesaian Kerr. Kerr menyelesaikan untuk $R_{\mu\nu} = 0$ dan Neuman telah amkannya kepada $G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$. Metrik terhasil ialah

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{2MrG}{\rho^2}[a\sin^2\theta\, d\phi - dt]^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\, d\phi^2 + \frac{\rho}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

dengan $\Delta(r) := r^2 - 2MGr + a^2$ dan $\rho^2(r,\theta) := r^2 + a^2\cos^2\theta$. Pembolehubah m mewakili jisim jasad, dan ma adalah momentum sudut pada ∞.

Perhatikan penyelesaian Schwarzchild mempunyai kesingularan kordinat (akibat pemilihan sistem kodinat tertentu) apabila $r = 2MG$ (“jejari Schwarzchild”) Adakah ini kesingularan sebenar? Ini boleh disiasat menggunakan suatu skalar, yang tidak bergantung kepada kordinat. Misalnya,

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2G^2}{r^6}.$$

Pembolehubah ini bertelatah baik pada $r = 2MG$, namun mencapah pada $r = 0$. Namun, pada jejari Schwarzchild, ada perubahan dalam telatah metrik. Pada $r = 2MG$, $g_{tt} = 0$ dan $g_{rr} \to \infty$. Pada jejari Schwarzchild juga, g_{tt} dan g_{rr} bertukar tanda. Di luar jejari Schwarchild, $g_{tt} > 0$ dan $g_{rr} < 0$, sementara dalam lingkungannya, $g_{tt} < 0$ dan $g_{rr} > 0$. Di luar, t adalah seperti-masa dan r seperti-ruang, sementara dalam jejari Schwarzchild, t jadi seperti-ruang sementara r seperti-masa. Walaupun pengembara yang mendekati ‘lohong hitam’ sampai kepadanya dalam masa wajar (yang relatif kepadanya) yang terhingga, bagi seorang pemerhati diluar jejari Schwarzchild, masa yang dia ukur bagi pengembara tadi memasuki jejari itu adalah tak terhingga. Untuk itu, jarak jejari Schwarzchild ini dirujuk ‘ufuk peristiwa’. Selepas itu, Kawasan di dalam jejari Schwarchild tidak dapak dicerap oleh seorang pemerhati di luar. Kejatuhan graviti pada r=0 juga tak dapat dicerap. Apa-apa jasad, dan bahkan cahaya juga, yang memasuki lohong hitam ini, terus tak dapat lepas keluar, kerana kelengkungan yang begitu dahsyat.

11.11 Graviti Kuantum

Oleh kerana tiga medan keunsuran yang lain dapat diperihalkan dengan baik sebagai teori medan kuantum, ada desakan untuk mencari pemerihalan medan kuantum kepada graviti. Bagaimanakah cara mengahwini teori medan kuantum dengan kerelatifan am?

Yang paling jelas, oleh kerana skala jarak graviti sangat besar berbanding daya-daya kuantum, ialah untuk menjalankan pengkuantuman daya-daya kuat, lemah dan electromagnet di atas ruang-masa latar yang melengkung. Mungkin pada amnya, tidak banyak kesan ketara dalam ruang-masa yang melengkung secara perlahan. Dengan transformasi kordinat, tanganan ruang melengkung tidak berbeza daripada tanganan ruang rata. Kesan kelengkungan dijangka bererti dalam rantau dengan medan graviti yang tinggi seperti dalam suatu lohong hitam.

Dalam ruang melengkung, Lagrangean Dirac,

$$\frac{i}{2}\bar{\psi}(\gamma^a\partial_a - m)\psi$$

menjadi

$$\frac{i}{2}\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

di mana D_μ mewakili pembezaan kovarian. D_μ diberi dalam bahagian 11.7 di atas.

Apapun, latar ruang-masa tidaklah bebas melengkung. Kita mahu menjaga aturan jujukan masa dan kebersebaban. Masalah bila ruang bertukar menjadi seperti masa dan masa seperti ruang, dan ini bagus dielakkan. Bagaimana hendak difahami teori medan kuantum merentasi ufuk peristiwa lohong hitam?

Secara mudah, kita boleh cuba lihat fenomena kuantum di sekitar lohong hitam. Apa yang boleh berlaku ialah pengeluaran pasangan zarah-antizarah dekat permukaan lohong hitam itu, yang boleh berlaku secara pantas. Biasanya zarah-antizarah ini musnahabis seula sebelum ia dapat dikesan. Namun kalau satu daripadanya ditelan ke dalam lohong hitam dan tidak dilihat lagi, dan yang satu lagi lepas, yang terlepas ini boleh dicerap luar. Jadi, lohong hitam menyinar. Ini dikenali dengan sinaran Bekenstein-Hawking. Apabila lohong hitam menyinar, ia bekehilangan tenaga/jisim dan maklumat.

Teori medan kuantum amat berjaya dalam memerihalkan daya-daya subatom. Kiraan usikan seperti tukarganti kuantum daya dapat dibuat dalam pemerihalan itu. Cubaan juga boleh dibuat untuk memerihalkan graviti dalam bentuk teori medan kuantum berusikan. Dalam kes ini, dianggap bahawa metrik adalah metrik rata, ditambah dengan usikan kecil, asas salingtindak, yang dikuantumkan, memberikan teori medan spin-2 yang tinggal di ruang rata. Teori yang terhasil mencapah dan tidak ternormalisasi semula. Didapati hanya graviti tanpa jirim dengan rajah Feynmann sehingga satu gelung sahaja yang terhad; bila dimasukkan jirim, dan dibenarkan dua gelung dan lebih, kita dapat teori yang tak ternormalsemula.

Satu pendekatan langsung kepada penyatuan kuantum dan kerelatifan ialah untuk mengkuantumkan graviti secara berkanun. Di sini, operator kuantum yang sepadan menggantikan kuantiti fizikan. Ini bermakna, metrik berubah menjadi operator kuantum.

Dalam perumusan Hamiltonian mekanik klasik biasa, pendakap Poisson adalah konsep penting. Suatu sistem koordinat berkanun terdiri daripada pembolehubah kedudukan dan momentum berkanun atau teritlak yang memenuhi hubungan Poisson-Bracket berkanun,

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

di mana pendakap Poisson diberikan oleh

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

untuk fungsi ruang fasa sembarangan $f(q_i,p_j)$ dan $g(q_i,p_j)$. Dengan menggunakan pendakap Poisson, persamaan Hamilton boleh ditulis semula sebagai,

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}$$
$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

Persamaan ini menggambarkan "aliran" atau orbit dalam ruang fasa yang dihasilkan oleh Hamiltonian. Diberi suatu fungsi ruang fasa $F(q,p)$, kita ada

$$\frac{d}{dt} F(q_i, p_i) = \{F, H\}.$$

Dalam pengkuantuman berkanun, pembolehubah-pembolehubah ruang fasa dipromosikan menjadi operator kuantum dalam ruang Hilbert, dan pendakap Poisson antara pembolehubah ruang fasa digantikan dengan hubungan komutasi berkanun:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

Dalam perwakilan kedudukan, hubungan komutasi ini direalisasikan oleh pilihan:

$$\hat{q}\psi(q) = q\psi(q) \qquad \text{dan} \qquad \hat{p}\psi(q) = -i\hbar \frac{d}{dq}\psi(q)$$

dan dinamik diperihal persamaan Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \widehat{H}\psi.$$

$\widehat{H}$ adalah operator terhasil daripada Hamiltonan $H(q,p)$ dengan penggantian $q \to \hat{q} = q$ dan $p \to \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dq}$.

Bagi kerelatifan am, kedudukan teritlak adalah g_{ij}. Ini berada di atas hipersatah seperti ruang $t = t_0.t$ atau x^0 perlu diasingkan, sebab ia terbabit dalam menerbitkan momentum teritlak, dan dalam Hamiltonan. Momentum teritlak, $\pi^{ij} = \frac{\delta S}{\delta \dot{g}_{ij}}$ di mana tindakan S ialah kamiran Langrangean L. Secara berkanun, $H = \sum \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - L$. L pula membabitkan g_{ij} dan $\dot{g}_{ij}$. Jadi dengan pengkuantuman kanunan, $g_{ij} \to \hat{g}_{ij}$, memberikan ketakpastian dalam ukuran g_{ij}.

Untuk pemerihalan Hamiltonan, yang membabitkan pendakap Poisson, masa untuk sistem perlu ditentukan. Ruang-masa perlu diuraikan kepada hiperpermukaan berlainan t. Uraian ruang-masa 3+1 kepada suatu keluarga hiperpermukaan seakan ruang 3 dimensi terparameter oleh suatu kordinat masa (sembarangan) membabitkan pengungkapan metrik berbentuk

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N_i N_j g^{ij} & N_j \\ N_i & g_{ij} \end{pmatrix}.$$

N ialah fungsi lelap, diberi oleh $dt = N(\mathbf{x}, x_0)\, dx_0$.

Jestru, pengkuantuman berkanun rumit dengan kekeliruan masa kerelatifan dan masa dinamik, dan juga membabitkan pengkuantuman metrik.

Pendekatan yang agak berjaya dan menarik, dari segi matematiknya, dalam menyatukan graviti dengan daya medan kuantum yang lain ialah menerusi supersimetri. Supersimetri adalah simetri di antara boson dan fermion. Seperti ketakvarianan terhadap transformasi tolok tempatan memberikan salingtindak tolok, ketakvarianan terhadap supersimetri tempatan memberikan supergraviti.

Supergraviti bentuk termudah memerihalkan saling tindak graviti dengan suatu medan Majorana spin 3/2. Medan Majorana bercampur keheliksan. Tanpa graviti, tindakan untuk medan spin 3/2 ialah

$$-\frac{1}{2} \int \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \psi_\sigma d^4 x$$

sementara tindakan supergraviti ialah (dengan unit di mana $\sqrt{32\pi G = 1}$),

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4 x \left[e e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}^{ab}(\omega) + i \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \bar{\psi}_\lambda \gamma_5 \gamma_\mu D_\nu \psi_\rho \right].$$

Graviti di sini ditulis dalam sebutan vierbein. Ingat

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}.$$

Atau,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^b}{\partial x^\nu} \eta_{ab} \equiv e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \eta_{ab}.$$

e ialah det $e_{a\mu} = \sqrt{-g}$. Adapun $R_{\mu\nu}^{ab}(\omega)$ adalah fungsi terhadap sambungan spin ω. Pembezaan kovarian, diberi

$$D_\rho \psi_\sigma \equiv \left(\partial_\rho + \omega_\rho^{ab} \Sigma_{ab} \right) \psi_\sigma,$$

di mana Σ_{ab} adalah unsur-unsur kumpulan Lie SO(3,1) untuk transformasi Lorentz. (Dalam perwakilan lazim,

$$\Sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \qquad \Sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix},$$

di mana σ_i adalah matriks Weyl.)

Tindakan ini didapati takvarian terhadap trnasformasi supersimetri tempatan,

$$\delta e_\mu^a = i \bar{\varepsilon} \gamma^a \psi_\mu$$
$$\delta \psi_\mu = 2 D_\mu \varepsilon$$
$$\delta \omega_\mu^{ab} = B_\mu^{ab} - \tfrac{1}{2} e_\mu^b B_c^{ac} + \tfrac{1}{2} e_\mu^a B_c^{bc}$$

di mana

$$B_a^{\lambda\mu} = i \bar{\varepsilon} \gamma_5 \gamma_a D_\nu \psi_\rho \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}.$$

Di sini $\varepsilon^{\alpha}(x)$ merupakan parameter infinitesimal transformasi supersimetri. Ia bukan nombor biasa tetapi adalah unsur "ganjil" (berantikomut) suatu algebra Grassman. Medan fermion mengambil nilai Grassman ganjil, sementara boson genap. Ini supaya pada tahap kuantum, medan-medan fermion antikomut dan medan-medan boson komut.

Model ini berguna sebab, tambahan kepada ia punyai supersimetri tempatan, ia juga dapat menyelesaikan masalah gandingan graviti dengan medan spin 3/2. Dalam ruang rata, lagrangean tak varian terhadap transformasi tolok

$$\delta\psi_{\mu}(x) = \partial_{\mu}\alpha(x)$$

yang, bersama dengan persamaan medan

$$R^{\lambda} \equiv \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_{\mu}\partial_{\nu}\psi_{\rho} = 0$$

memberi identiti

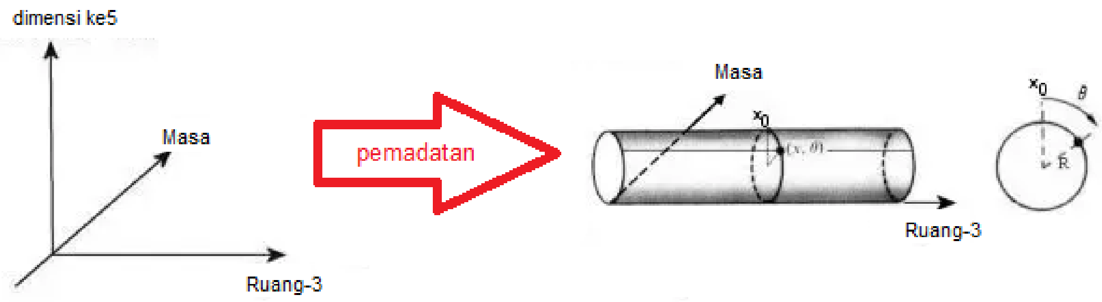
$$\partial_{\lambda}R^{\lambda} = 0.$$

Namun, dalam ruang lengkung, kekonsistenan seperti ini tidak lagi wujud, sehingga kita perkenalkan terbitan kovarian D_{μ} seperti di atas. Ini memberikan persamaan pergerakan yang konsisten. Pemerihalan sistem didapati dengan menyelsaikan ω_{μ}.

11.12 Daya tolok daripada Kelengkungan Ruang

Satu lagi pendekatan ke arah penyatuan graviti dan daya-daya laian ialah menerusi model Kaluza-Klein. Jika graviti boleh diperihalkan sebagai akibat kelengkungan ruang-masa, mungkin daya lain juga boleh difahamkan sedemikian juga. Untuk ini, dimensi tambahan ruang-masa diperlukan.

Keelektromagnetan boleh dimasukkan dengan menghendaki ruang-masa berdimensi 4+1, dengan kelengkungan dimensi kelima lebihan itu menimbulkan daya itu. Inilah model Kaluza-Klein asal. Dimensi lebihan itu berbulat, atau kompak, dan berkala. Dimensi lebihan ini memberikan kesan daya, namun ia tidak dapat dicerapi, kerana jejarinya R yang sangat kecil. Sekurang-kurangnya ia tidak dapat dapat dicerapi pada jarak gelombang yang lebih besar daripada jejari itu. Had atas tenaga sebelum dimensi lebihan ini 'kelihatan' ialah $\sim hc/R$.



Ruang-masa 5 dimensi dengan satu ruang dimensi dipadatkan ke atas bulatan yang kecil.

Simetri bulatan dimensi tambahan ini memberikan simetri U(1) keelektromagnetan. Teori Kaluza mempertimbangkan hanya graviti dalam ruang-masa 5 dimensi (diindeks huruf besar roman), adalah naik-turun metrik terhadap ruang rata,

$$g_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN} \qquad (M,N = \mu,5).$$

h_{MN} terurai kepada zarah-zarah $h_{\mu\nu}$, graviton spin 2, $h_{\mu 5}$, foton, dan suatu skalar h_{55}. Kaluza-Klein mempertimbangkan medan skalar dalam 5 dimensi. Jika y mewakili dimensi kelima, tindakan berkenaan ialah

$$S_5 = -\int d^4x dy\ M_* \left[|\partial_\mu \phi|^2 + |\partial_y \phi|^2 + g_5^2 |\phi|^4 \right].$$

y terpadat dalam bulatan berjejari R:

$$y = y + 2\pi R.$$

Kembangkan medan kompleks skalar sebagai siri Fourier,

$$\phi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{iny}{R}} \phi^{(n)}(x) = \phi^{(0)}(x) + \sum_{n\neq 0} e^{\frac{iny}{R}} \phi^{(n)}(x).$$

Kamiran terhadap y memberikan $S_5 = S_4^{(0)} + S_4^{(n)}$, dengan

$$S_4^{(0)} = -\int d^4x\, 2\pi R M_* \left[\left|\partial_\mu \phi^{(0)}\right|^2 + g_5^2 \left|\phi^{(0)}\right|^4 \right],$$

dan

$$S_4^{(n)} = -\int d^4x\, 2\pi R M_* \sum_{n\neq 0} \left[\left|\partial_\mu \phi^{(n)}\right|^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \left|\phi^{(n)}\right|^2 \right] + \text{ gandingan kuartik}.$$

$S_4^{(0)}$ mewakili suatu skalar tanpa jisim (terma dinamik + terma gandingan-4). $S_4^{(n)}$ pula mewakili suatu 'menara' mod-mod berjisim, dengan jisim-jisim (n/R). Bergantung kepada nilai R, ini merupakan zarah-zarah berat yang tidak berpengaruh pada tenaga rendah. Oleh kerana peminuman tidakan tidak dipengaruhi pekali malar kepada tindakan tersebut, perhatikan kita boleh perihalkan teori 5 dimensi sebagai teori 4 dimensi:

$$S_4^{(0)} = -\int d^4x \left[\left|\partial_\mu \phi^{(0)}\right|^2 + g_4^2 \left|\phi^{(0)}\right|^4 \right]$$

dengan meletakkan

$$g_4^2 = \frac{g_5^2}{2\pi R M_*}.$$

Begitulah juga untuk graviti dan medan tolok,

$$-\int d^4x \left[\frac{1}{16\pi G_N} R^{(0)} + \frac{1}{4g_4^2} F^{(0)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(0)} \right] + \cdots$$

dengan

$$G_N = \frac{1}{16\pi^2 R M_*^3}.$$

Kekuatan salingtindak ditindas oleh jejari dimensi lebihan. Dalam 5 dimensi, g_5 patutnya berusikan, namun dalam perspektif 4 dimensi, g_4 patutnya berganding kuat. Gandingan tolok dalam 5 dimensi punyai dimensi jisim negatif, maka teori ini tidak ternormal semula. Dalam pandangan 4 dimensi, ini adalah akibat mod-mod Kaluza-Klein yang tercapai pada skala tenaga tinggi. M* merupakan penggalan bagi teori ini, yang kita tangani sebagai teori berkesan di bawah skala jisim ini.

Menurut hukum Gauss, medan daya dari suatu cas titik perlu dikamirkan atas permukaan sfera (2 dimensi ruang) untuk 4 dimensi,

$$\oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = Q$$

dan permukaan hipersfera (3 dimensi) untuk 5 dimensi,

$$\oint_{S_3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = Q$$

memberikan masing-masing, medan dan keupayaan,

$$E \propto \frac{1}{r^2}, \qquad \Phi \propto \frac{1}{r}$$

dan

$$E \propto \frac{1}{r^3}, \qquad \Phi \propto \frac{1}{r^2}.$$

Kes kedua berlaku bila r kecil. Namun bila $r >> R$, bila kamiran ialah atas permukaan hiperlempeng, yang luasnya berkadaran r^2, kes pertama, hukum kuasadua songsang, berlaku seperti biasa.

Untuk memasukkan daya-daya tolok lain, ruang-masa dengan dimensi yang lebih tinggi diperlukan. 1 cas elektromagetan, 3 jenis perisa lemah, dan 3 warna QCD bermakna diperlukan sekurang-kurangnya 6 dimensi ruang tambahan, untuk memasukkan kesemua daya-daya tolok.