4.1 Pengkuantuman kanunan

Mekanik kuantum menggunakan operator untuk mendapatkan nilai sesuatu parameter sistem. Proses pengkuantuman kanunan mudah: gantikan parameter dengan operator. Pengkuantuman rumusan bagi tenaga, $E = \frac{p^2}{2m} + V$, menghasilkan persamaan Schroedinger, $\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi$. Namun, ungkapan ini ialah bagi keadaan tidak berkerelatifan. Tenaga dalam teori kerelatifan khas diberikan persamaan $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Pengkuantuman kanunan persamaan ini menghasilkan persamaan $\hat{H}^2\psi = -\hbar^2c^2\nabla^2\psi + m^2c^4\psi$. Jika unit-unit di mana $\hbar = c = 1$ (unit semesta) digunakan, persamaan ini boleh ditulis $\Box\psi - m^2\psi = 0$. Ini dikenali sebagai persamaan Klein-Gordon.

Jika dibandingkan dengan persamaan Schroedinger, yang berbentuk linear, persamaan Klein-Gordon agak tak linear. Kelebihan persamaan yang linear ialah ia membenarkan superposisi, di mana hasiltambah linear dua penyelesaian berlainan juga merupakan penyelesaian. Juga, dengan bentuk kuasadua yang ada dalam persamaan Klein-Gordon, ada maklumat yang hilang. Persamaan Klein-Gordon ini dapat memerihalkan zarah berkerelatifan, tapi tanpa perihalan spin, ataupun hanya untuk zarah berspin sifar.

Mungkinkah kita perolehi suatu persamaan yang linear untuk mekanik kuatum berkerelatifan? Untuk zarah-zarah yang tak berjisim, kita perolehi $E^2 = p_x^2c^2 + p_y^2c^2 + p_z^2c^2$. Menggunakan unit semesta, andaikan persamaan linear ini dipuaskan: $\frac{\partial}{\partial t}\psi = \sigma_x\frac{\partial}{\partial x}\psi + \sigma_y\frac{\partial}{\partial y}\psi + \sigma_z\frac{\partial}{\partial z}\psi$. Pekali-pekali σ_x dan sebagainya perlu diandaikan nombor-nombor yang tak semestinya kalistertib terhadap hasildarab. Persamaan ini dikenali persamaan Weyl. Kita ambil kuasadua persamaan Weyl dan bandingkannya dengan persamaan kerelatifan Einstein. Kuasadua ini memberikan $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \sigma_x{}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \sigma_y{}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + \sigma_z{}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\psi + (\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\psi + (\sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z)\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\psi$. Untuk mendapat persamaan dengan persamaan Einstein, diperlukan $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$. Juga, $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0$, bersama pilihatur kitaran lain. Dalam kata lain, σ-σ ini antikomut: $\{\sigma_x, \sigma_y\} = 0$. Jadi σ ini bukan nombor biasa. Namun kita boleh wakili σ dengan matriks – matriks memang bukan kalis tertib. Kalau begitu, ψ berbilang komponen. Penyelesaian termudah ialah dengan σ sebagai matriks 2x2, yang mengimplikasikan ψ 2-komponen. Suatu penyelesaian ialah dengan memilih σ-σ ini sebagai matriks-matriks spin Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Boleh disemak bahawa pilihan ini memuaskan persamaan-persamaan kekangan di atas.

Persamaan Weyl dengan matriks Pauli memerlukan fungsi gelombang ψ berbentuk 'spinor' 2-komponen, $\psi_j = u_j e^{i(\mathrm{p.r}-Et)}$, dengan j = 1, 2. Dengan itu u ada dua bentuk bebas, $u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, yang boleh dikaitkan dengan zarah berspin ke atas, $s_z = +\frac{1}{2}$, dan $u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, yang boleh dikaitkan dengan zarah berspin ke bawah, $s_z = -\frac{1}{2}$.

Langkah seterusnya ialah untuk mempertimbangkan zarah berjisim. Kita boleh buat andaian yang serupa seperti untuk persamaan Weyl, tetapi kali ini dengan mengambilkira keseluruhan persamaan tenaga kerelatifan. Pertimbangkan andaian $\alpha_t\frac{\partial}{\partial t}\psi + \alpha_x\frac{\partial}{\partial x}\psi + \alpha_y\frac{\partial}{\partial y}\psi + \alpha_z\frac{\partial}{\partial z}\psi = m\psi$. Jika ini dikuasaduakan, tanpa apa-apa andaian tentang kekalistertiban nombor-nombor α, kita dapati,

$\alpha_t{}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi + \alpha_x{}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \alpha_y{}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + \alpha_z{}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi + (\alpha_t\alpha_x + \alpha_x\alpha_t)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\psi + (\alpha_t\alpha_y + \alpha_y\alpha_t)\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}\psi + (\alpha_t\alpha_z + \alpha_z\alpha_t)\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\psi + (\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\psi + (\alpha_x\alpha_z + \alpha_z\alpha_x)\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\psi + (\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\psi = m^2\psi$. Membandingkan ini dengan persamaan kerelatifan, bermakna $\alpha_t{}^2 = 1$, $\alpha_x{}^2 = \alpha_y{}^2 = \alpha_z{}^2 = -1$, dan $\alpha_t\alpha_x + \alpha_x\alpha_t = 0$, dan pilihatur-pilihatur kitaran yang lain. Suatu penyelesaian untuk *α* ialah pilihan berikut, yang dikenali sebagai kelaziman piawai Bjorken-Drell; $\alpha_t = i\gamma^0$, $\alpha_x = i\gamma^1$, $\alpha_y = i\gamma^2$, $\alpha_z = i\gamma^3$, dengan

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \text{ dan } \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

di mana matriks 2×2 $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan dan $\sigma^i = \sigma_i$, matriks-matriks Pauli seperti di atas ($\sigma_1 = \sigma_x$, dan sebagainya). Lazimnya, indeks huruf rom *i* dan lain-lain digunakan bagi mewakili 3 dimensi ruang; *i* = 1,2,3. Semak hubungan antikomutator yang terhasil, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\, g^{\mu\nu}$, dengan μ dan ν mengindeks matriks

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

g adalah tensor metrik ruang-masa yang memberi maklumat tentang strukturnya, khususnya kelengkungannya, dan dalam kes ini, adalah bagi ruang datar, dan metriknya digelar metrik Minkowski dan ditandai η. Indeks huruf yunan seperti μ dan ν secara lazimnya mewakili 4 dimensi ruang-masa, jadi μ =0, 1, 2, 3, dan sebagainya.

Sekarang kita ada persamaan $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0$, ataupun $\gamma^\mu p_\mu\psi = m\psi$, dalam tatatanda vector-4, iaitu yang dikenali sebagai persamaan Dirac, bagi zarah bebas. Di sini, kelaziman hasiltambah untuk indeks berulang dianggapkan, yakni misalnya $\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3$. Juga, naik/turun indeks membabitkan metric, jadi $\gamma^\mu p_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu p^\nu = (+1)\gamma^0 p^0 + 0 + 0 + 0 + 0 + (-1)\gamma^1 p^1 + 0 + 0 + 0 + 0 + (-1)\gamma^2 p^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + (-1)\gamma^3 p^3 = \gamma^0 p^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3$. Bila di'kuasadua'kan, persamaan Dirac membawa kepada persamaan kerelatifan tadi, yang dalam bentuk vektor-4, $p^\mu p_\mu = m^2$. Oleh kerana persamaan Dirac membabitkan matriks 4×4, ψ merupakan spinor dengan 4 komponen, ataupun matriks lajur 4 komponen,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

atau, dalam kata lain, secara prinsipnya ada 4 penyelesaian bebas. Penyelesaian-penyelesaian ini berbentuk $\psi_j = u_j e^{-ix^\mu p_\mu}$, *j*=1,2,3,4, dengan u_j malar.

Pertimbangkan suatu zarah bebas berjisim *m* bergerak dalam arah paksi-*z* dengan momentum *p*. Momentum-4 zarah ini ialah $p_\mu = (E, 0, 0, p)$. Kita tadi mahukan penyelesaian berbentuk $\psi_j = u_j e^{-ix^\mu p_\mu}$ yang, kalau dibezakan, memberikan $\partial_\mu\psi_j = \frac{\partial\psi_j}{\partial x^\mu} = -ip_\mu u_j e^{-ix^\mu p_\mu} = -ip_\mu\psi_j$. Jadi, dari persamaan Dirac, untuk zarah ini, $(\gamma^0 E - \gamma^3 p - m)\psi = 0$. Ini memberikan

$$\left[\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \\ -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ataupun

$$\begin{pmatrix} m-E & 0 & p & 0 \\ 0 & m-E & 0 & -p \\ -p & 0 & m+E & 0 \\ 0 & p & 0 & m+E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bagi zarah rehat, p = 0 dan E = m, jadi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dalam kes ini, hanya dua penyelesaian tak bersandar bagi u, iaitu,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

yang kita boleh kaitkan dengan 2 keadaan spin elektron, masing-masing spin ke atas dan spin ke bawah.

Kehendak zarah pegun telah mengekang penyelesaian kepada 2 kemungkinan sahaja. Sepatutnya, seperti yang dikatakan di atas, kita ada 4 penyelesaian yang tidak bersandaran. Dua lagi penyelesaian yang tidak bersandar dengan 2 penyelesaian di atas ialah,

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bagaimanakah kita boleh tafsirkan penyelesaian-penyelesaian ini? Untuk memahaminya, cuba kita lihat bahawa kita memperolehinya jika kita letakkan E = - m untuk menghasilkan persamaan

$$\begin{pmatrix} 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cuma persoalan sekarang ialah apakah yang dimaksudkan dengan tenaga negatif?

Daripada persamaan kerelatifan,

$$E^2 = p^2 + m^2,$$

secara prinsipnya, kita boleh memperolehi tenaga negatif, kerana

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}.$$

Tafsirkan penyelesaian tenaga negatif ini sebagai keadaan-keadaan *antizarah*, sebagaimana kita tangani lohong-lohong dalam fizik semipengkonduksi. Suatu keadaan tenaga negatif bertelatah seperti keadaan tenaga positif, tetapi bertentangan. Suatu antizarah bergerak dan bertindak berlawanan dengan gerakan dan tindakan zarahnya, tetapi dengan jisim yang masih sama. Jadi antizarah mempunyai nombor-nombor kuantum yang bertentangan dengan nombor-nombor kuantum zarah. Antielektron, misalnya, mempunyai cas elektrik +1e berbanding cas elektron -1e (dan dengan itu dikenali juga dengan nama positron, ditandai e^+), dan jisim m_e, iaitu jisim elektron. Dengan itu, kita boleh kaitkan keadaan

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

dengan antielektron spin ke atas, dan keadaan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dengan antielektron spin ke bawah.

Supaya kita boleh perihalkan antizarah dengan tenaga positif, kita gunakan persamaan

$$(\gamma^{\mu} p_{\mu} - m)\, u = 0$$

untuk zarah (kes $E = m$), dan persamaan

$$(\gamma^{\mu} p_{\mu} + m)\, v = 0$$

untuk antizarah (kes $E = -m$).

Penyelesaian penuh yang diperolehi bagi zarah dengan momentum-4 $p^{\mu} = (E, 0, 0, p)$ bolehlah sekarang ditulis:

$$u_{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bagi elektron, spin ke atas,}$$

$$u_{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p}{E+m} \end{pmatrix} \text{ bagi elektron, spin ke bawah,}$$

$$v_{+} = \begin{pmatrix} \frac{-p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bagi positron, spin ke atas, dan}$$

$$v_{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bagi positron, spin ke bawah.}$$

Sila semak bahawa penyelesaian-penyelesaian ini memuaskan persamaan Dirac.

Pada tahun 1932, Anderson telah menentusahkan hipotesis antizarah oleh Dirac ini dengan penemuannya akan antielektron atau positron. Seperti ditunjukkan dalam rajah, foton atau zarah cahaya, dengan tenaga yang melebihi $2m_e$, yang menghentam sekeping kerajang, menghasilkan dua jejak zarah bercas dalam kebuk awan, dengan pesongan yang bertentangan dalam medan magnet yang seragam. Arah pesongan yang bertentangan menunjukkan kepada cas yang bertentangan, dan daripada kadar pesongan, dapat dikira momentum zarah-zarah itu masing-masing. Ini merupakan tindakbalas *pengeluaran pasangan*. Foton tuju, dalam medan elektrik, bertindak dengan foton maya, berubah menjadi pasangan elektron-positron:

$$\gamma\gamma^{*} \rightarrow e^{+}e^{-}.$$


Pengeluaran
pasangan
medan magnet
serenjang kpd satah