Mekanik kuantum bersifat berkebarangkalian, seperti yang ditonjolkan oleh Prinsip Ketakpastian Heisenberg. Tenaga ΔE boleh dipinjam untuk seketika Δt selagi $\Delta E \Delta t \sim \hbar$, pemalar Planck. Jika tenaga ini lebih daripada tenaga jirim bagi sesuatu zarah dan antizarahnya, pasangan zarah-antizarah tersebut boleh wujud secara hutang dalam masa yang ditentukan itu. Jadi vakum boleh dilihat sebagai berisi zarah dan antizarah yang muncul dan hilang. Bahkan, menurut teori medan kuantum, medan daya sebenarnya adalah medan zarah dan antizarah maya. Penghasilan dan pemusnahan zarah tidak dapat diterangkan oleh mekanik kuantum; kita perlukan teori medan kuantum.

5.1 Medan kuantum

Dalam teori medan kuantum, medan itu sendirilah pembolehubah dinamiknya. Medan ialah kuantiti bernilai di setiap titik ruang-masa. Kuantiti ini mungkin sahaja suatu skalar, vektor, spinor, tensor, atau lain-lain, $\phi_\alpha(x)$. Diandaikan bahawa medan ini berubah secara lancar terhadap kedudukannya, yakni pembezaannya terhadap ruang adalah terdefinisi. Perubahan boleh berlaku dari segi medan ϕ, dan juga akibat dari perubahan kordinat x itu sendiri. Perbezaan di antara medan ϕ(x) dan suatu medan dengan bentuk fungsian sedikit berbeza $\phi'(x)$, diukur pada kedudukan ruangmasa yang sama dalam kordinat yang sama ialah

$$\delta_0\phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x).$$

Jika kordinat juga berubah, $\delta x^\mu \equiv x'^\mu - x^\mu$, maka perbezaan fungsian ini ialah

$$\delta\phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x).$$

Andaikan perubahan kecil dan lancar. Menggunakan kembangan Taylor,

$$\delta\phi(x) = \phi'(x + \delta x) - \phi(x)$$
$$= \phi'(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi'(x) + \cdots - \phi(x).$$

Mengabaikan sebutan-sebutan peringkat tinggi, maka kita perolehi

$$\delta\phi(x) \cong \delta_0\phi(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi'(x).$$

Kembangkan $\phi'(x)$,

$$\delta\phi(x) = \delta_0\phi(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \big(\phi(x) + \delta_0\phi(x)\big)$$
$$= \delta_0\phi(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) + \cdots$$

Jadi, bagi peringkat utama dalam perubahan,

$$\delta\phi(x) = \delta_0\phi(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x).$$

Bagi medan dengan dua pembolehubah, menggunakan kaedah yang sama, kita dapati, pada peringkat utama,

$$\delta\phi(x,y) = \delta_0\phi(x,y) + \delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi(x,y) + \delta y^\mu \frac{\partial}{\partial y_\mu}\phi(x,y),$$

dan seterusnya bagi bilangan pembolehubah yang lebih lagi.

Operator perubahan δ boleh ditunjukkan secara mudah memuaskan hubungan berikut:

$$\delta(g(x)h(y)) = h(y)\ \delta g(x) + g(x)\ \delta h(y)$$

(hukum hasildarab), dan,

$$\delta_0 \partial_\mu \phi(x) = \partial_\mu \delta_0 \phi(x)$$

(komut dengan pembedaan separa).

Medan kuantum yang memerihalkan zarah keunsuran menghormati simetri tertentu. SImetri translasi masa menghasilkan keabadian tenaga, sementara translasi ruang dan putaran ruang membawa kepada keabadian momentum dan keabadian momentum sudut. Ketakvarianan yang paling penting ialah prinsip kerelatifan, yang membabitkan simetri Lorentz.

Suatu medan skalar (terhadap transformasi Lorentz) ialah medan yang tidak berubah apabila kordinatnya melalui transformasi Lorentz $x \to x'$,

$$\phi'(x') = \phi(x).$$

Bagi suatu transformasi infinitesimal, $\delta\phi \equiv \phi'(x') - \phi(x) = \phi'(x + \delta x) - \phi(x)$, memberikan

$$\delta\phi = \phi'(x) - \phi(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi' + O(\delta x^2).$$

Pada $O(\delta x)$, gantikan $\partial_\mu \phi'$ dengan $\partial_\mu \phi$. Jadi, mengabaikan peringkat tinggi dalam δx, kita perolehi,

$$\delta\phi = \delta_0 \phi + \delta x^\mu \partial_\mu \phi\ .$$

Skalar bebas (keupayaan sifar) memuaskan persamaan Klein-Gordon. Ini boleh didapati seperti berikut.

Daripada skalar ϕ, kita boleh bentukkan vektor, $\partial_\mu \phi$, dan tensor, $\partial_\mu \partial_\nu \phi$. Darpada tensor ini kita boleh perolehi suatu skalar,

$$\Box\phi = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \phi.$$

Akan tetapi tiada skalar yang bebas daripada ϕ boleh diterbitkan daripada ϕ. Maka kita boleh tulis,

$$a \,\Box\phi + b\phi = 0.$$

Panggillah b/a itu m^2, maka ini ialah persamaan Klein-Gordon untuk suatu medan skalar bebas,

$$\Box\phi + m^2\ \phi = 0.$$

Parameter m itu rupanya jisim zarah yang diperihalkan oleh medan berkenaan.

Medan spinor pula mempunyai dua komponen kompleks, yang memberikan dua komponen kuantiti dipanggil “spin”; dalam kes ini, bagi spin ½. Ia sebenarnya merupakan perwakilan tertentu bagi kumpulan simetri yang memberikan ketakvarianan Lorentz. Malah, skalar boleh dilihat sebagai perwakilan spin 0. Spinor bebas memuaskan persamaan Dirac.

Bagi suatu spinor ψ, diperhatikan bahawa $\partial_\mu \psi$ ialah vektor-spinor, maka φ ialah spinor juga, di mana

$$\varphi_a = i\gamma^\mu{}_{ab} \partial_\mu \psi_b.$$

Spinor φ tidak bebas daripada ψ, dan hubungan linear di antara mereka membawa kepada persamaan

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$

untuk spinor bebas. Spinor ini mempunyai 4 komponen bebas, yang padan dengan 2 keadaan spin ½ didarab keadaan-keadaan tengan negative dan positif.

Medan vektor dikaitkan dengan spin 1, sementara ada juga medan spin 3/2 dan medan tensor berspin 2. Bagi medan vektor $\phi^\mu(x)$, kehendak yang tiada vektor dan skalar lain yang boleh dibina daripadanya yang bebas daripadanya, membawa kepada

$$\begin{cases} (\Box + m^2)\phi^\mu = 0 \\ \partial_\mu \phi^\mu = 0 \end{cases}.$$

Persamaan kedua mengekang komponen-komponen $\phi^\mu(x)$, meninggalkan hanya 3 komponen bebas, justru spin 1. Medan spinor-vektor $\psi_\alpha{}^\mu(x)$ membawa kepada persamaan-persamaan Rarita-Schwinger, yang memerihalkan medan dengan 8 komponen bebas, setara dengan spin 3/2 (didarab dua keadaan tenaga). Begitu juga suatu tensor pangkat kedua $\phi^{\mu\nu}(x)$, yang mulanya mempunyai 16 komponen, dikekang meninggalkan medan dengan 5 komponen bebas, padan dengan spin 2.

5.2 Fungsian tindakan

Dari mekanik klasik, Prinsip Tindakan Tersedikit menyatakan bahawa dinamik sesuatu sistem itu sebegitu di mana fungsian tindakan diminimumkan. Tindakan merupakan suatu fungsian yang didefinisikan sebagai,

$$S[\phi_a, \partial_\mu \phi_a] \equiv \int \partial^4 x\, \mathcal{L}\left(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)\right),$$

di mana $\mathcal{L}$ ialah (ketumpatan) Lagrangean yang memerihal sistem tersebut. Lagrangean secara mudahnya ialah tenaga kinetik tolak tenaga keupayaan, tetapi di sini marilah kita lihatnya secara formal dahulu.

Pada nilai medan di mana tindakan diminimumkan, perubahan tindakan terhadap perubahan medan adalah sifar (titik ekstremum),

$$\delta_0 S = 0.$$

Tetapi,

$$\delta_0 S = \int \partial^4 x\, \delta_0 \mathcal{L},$$

dan

$$\delta_0 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta_0 \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta_0(\partial_\mu \phi_a).$$

Jadi, menggunakan kekomutan perubahan dengan pembedaan separa, dan hukum rantai bagi pembedaan itu, kita perolehi,

$$\delta_0 S = \int \partial^4 x\, \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta_0 \phi_a - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\right) \delta_0 \phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta_0 \phi_a\right)\right].$$

Sebutan ketiga merupakan kamiran 4-isipadu suatu pembedaan, memberikan kamiran permukaan

$$\oint d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta_0 \phi_a.$$

Kita berminat melihat perubahan ϕ_a dalam ruang isipadu berkenaan, dan diandaikan ia tiada perubahan di atas permukaan, jadi $\delta_0\phi_a = 0$ di sini. Oleh itu kamiran ini sifar. Maka,

$$\delta_0 S = \int \partial^4 x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right)\right]\delta_0\phi_a.$$

Prinsip Tindakan Tersedikit dengan itu memberikan

$$\int \partial^4 x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right)\right]\delta_0\phi_a = 0,$$

dan seterusnya persamaan Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right) = 0.$$

Diberi suatu Lagrangean, persamaan Euler-Lagrange boleh digunakan untuk mendapatkan persamaan-persamaan pergerakan bagi medan berkenaan.

Berkait dengan medan ϕ, kita boleh kaitkan pembolehubah momentum, π, yang konjugat kepadanya. Jika Langrangean, $L \equiv \int \partial^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}$, mengikuti mekanik klasik, momentum konjugat diberikan

$$\pi(x_i) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}(x_i)}.$$

Lihat pula perubahan di mana kordinat-kordinat bertransformasi secara infinitesimal,

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu.$$

Ini disebut ‘diffeomorfisme’. Perubahan keseluruhan dalam Langrangean,

$$\delta\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L} + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}.$$

Ini boleh dikembangkan,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta_0\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta_0(\partial_\mu\phi_a) + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}.$$

Sebutan kedua di sebelah kiri boleh ditulis sebagai

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta_0\phi_a\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right)\delta_0\phi_a$$

(δ_0 dan ∂_μ komut). Medan $\phi_a(x)$ seharusnya memuaskan persamaan Euler-Lagrange, jadi sebutan kedua ini membatalkan sebutan pertama dalam persamaan asal. Maka, perubahan suatu Lagrangean di bawah suatu diffeomorfisme am, adalah

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta_0\phi_a\right) + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}.$$

Suatu medan skalar bebas diperihalkan oleh persamaan Klein-Gordon,

$$(\partial^2 + m^2)\phi = \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \nabla^2 + m^2\right)\phi = 0$$

yang boleh diterbitkan dari fungsi Lagrangean,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2\right].$$

5.3 Kamiran jejak Feynman

Tindakan, *S*, boleh didekati menerusi penggunaan kamiran jejak Feynman. Pertimbangkan suatu zarah titik, berkedudukan $x_i(t)$, i = 1, 2, 3, pada masa *t*, bergerak dalam suatu keupayaan bebas masa, $V(x_i)$. Jejaknya di antara t_1 ke t_2 diberi oleh $x_i(t)$ ini, dengan titik permulaan $x_i(t_1)$ dan titik akhir $x_i(t_2)$. Tindakan *S* bergantung kepada jejak ini, di samping kepada masa awal dan akhir t_1 dan t_2. Oleh kerana jejak itu sendiri suatu fungsi, tindakan ialah fungsi suatu fungsi, disebut *fungsian*, dan ditulis dengan kurungan empat segi, $S[x_i(t)]$. Untuk zarah ini,

$$S([x_i]; t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{m}{2}\dot{x}_i{}^2 - V(x_i)\right).$$

Jejak klasik merupakan jejak yang meminimumkan *S*. Menurut gambaran Feynman, dalam pandangan mekanik kuantum, setiap jejak menyumbang kepada amplitud terakhir. Sesuatu jejak menyumbang satu amplitud dan satu fasa berlainan. Amplitud terhasil akhirnya ialah hasiltambah koheren amplitud-amplitud terkait dengan semua jejak yang mungkin.

Pertimbangkan sistem satu dimensi takberkerelatifan dengan Lagrangean $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$, dan Hamiltonan $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$. Bagi jejak dari kedudukan x_a ke x_b, dalam masa t_a ke t_b, amplitud peralihannya ialah

$$K(x_b, x_a) \equiv \langle x_b, t_b | x_a, t_a\rangle = \langle x_b | e^{-iH(t_b - t_a)} | x_a\rangle.$$

Perkenalkan set lengkap keadaan-keadaan pada jujukan masa t_0, t_1, …, t_N, di mana $t_i + 1 > t_i$ dan $t_0 \equiv t_a$ dan $t_N \equiv t_b$. Jadi,

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a\rangle =$$
$$\int \ldots \int dx_1 \ldots dx_{N-1} \langle x_b, t_b | x_{N-1}, t_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_{N-2}, t_{N-2}\rangle \ldots \langle x_2, t_2 | x_1, t_1\rangle\langle x_1, t_1 | x_a, t_a\rangle.$$

Bagi beza masa dalam jujukan ini kecil, t_2-t_1 kecil, kita jangkakan x_2-x_1 juga kecil, dan oleh itu boleh anggap $V(x)$ sebagai pemalar di situ. Mengembangkan identiti dalam sebutan fungsi eigen momentum $|k\rangle$, kita boleh tulis

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1\rangle = \int \frac{dk}{2\pi}\langle x_2, t_2 | k\rangle\langle k | x_1, t_1\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-i\left(\frac{k^2}{2m} + V\right)(t_2 - t_1) + ik(x_2 - x_1)}.$$

Sedikit pengiraan menghasilkan

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1\rangle = \sqrt{\frac{m}{i2\pi(t_2 - t_1)}} e^{i\int_{t_1}^{t_2} dt\, L[x(\tau)]}.$$

Dengan itu, membuat penggantian, kita perolehi,

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a\rangle = \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_{N-1}\, e^{i\int_{t_a}^{t_b} dt\, L[x(\tau)]} \prod_i \sqrt{\frac{m}{i2\pi(t_i - t_{i-1})}}.$$

Siri x_a, x_1, x_2, ..., x_{N-1}, x_b mewakili suatu jejak atau lintasan. Kamiran adalah fungsian terhadap $x(t)$, dan dibuat terhadap semua lintasan mungkin. Dengan itu, ia dikenali sebagai kamiran lintasan atau kamiran jejak. Setepatnya, kamiran lintasan ini ditulis

$$\int \mathcal{D}\{x(t)\} \equiv \int \dots \int dx_1 \dots dx_{N-1} \prod_i \sqrt{\frac{m}{i2\pi(t_i - t_{i-1})}}.$$

Jadi

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}\{x(t)\}\, e^{i \int_{t_a}^{t_b} dt\, L[x(\tau)]}.$$

Amplitud kuantum ialah sumbangan fasa dari semua lintasan di antara titik awal dan titik akhir. Jejak atau lintasan yang paling berkebarangkalian mengandungi fasa-fasa yang berinterferens membangun, sementara interferens memusnah fasa-fasa menyebabkan jejak yang lain berkebarangkalian rendah. Bahkan jejak ini berkesepadanan dengan jejak klasik, iaitu jejak yang meminimumkan tindakan. Apabila $\hbar$ semakin kecil, ayunan fasa semakin kencang berlawanan, dan dalam had $\hbar \to 0$, hanya trajektori klasik yang tinggal.

5.4 Teori Tolok

Teori tolok melibatkan medan vektor (vektor tolok) yang mempunyai simetri dalaman tertentu (simetri tolok). Umpamanya, keelektromagnetan membabitkan foton sebagai vektor tolok dengan simetri tolok U(1).

Medan keelektromagnetan bebas dikawal oleh persamaan Maxwell,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0,$$

di mana $F^{\mu\nu}(x)$ adalah tensor medan, iaitu ikal medan keupayaan $A^\mu(x)$,

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu A^\nu(x).$$

(Perhatikan bahawa ini merupakan persamaan-persamaan linear yang termudah untuk suatu medan vektor.) Persamaan-persamaan ini adalah takvarian tolok, yakni tiada perubahan berlaku apabila $A^\mu(x)$ ditambah cerun suatu fungsi sebarangan, $\partial^\mu \Lambda(x)$. Ini justru ikal cerun adalah sifar. Medan tensor $F'^{\mu\nu}(x)$ yang diterbitkan daripada $A'^\mu(x)$, di mana $A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$, tidak berubah, iaitu $F'^{\mu\nu}(x) = F^{\mu\nu}(x)$. Kehendak ketakvarianan tolok, menghadkan, $F^{\mu\nu}(x)$, seperti terdefinisi di atas, sebagai tensor peringkat kedua takvarian tolok yang tunggal terhasil daripada pembedaan medan $A_\mu(x)$.

Transformasi tolok berkait dengan tatarajah dalaman zarah. Oleh kerana nilai-nilai kebarangkalian dalam mekanik kuantum diberikan oleh nilai magnitud fungsi gelombang sistem, apa-apa fasa khayal tambahan kepada fungsi gelombang tidak memberi apa-apa perbezaan,

$$|\psi(x)e^{i\theta}|^2 = |\psi(x)|^2.$$

Ini suatu simetri sejagat, kerana perubahan fasa ini sama pada semua kedudukan. Kita boleh kehendaki simetri tolok tempatan dengan perubahan fasa yang bergantungkan kedudukan. Simetri ini masih sah, kerana kebarangkalian masih tidak berubah. Namun transformasi tolok ke atas keupayaan $A^\mu(x)$ harus dimodifikasi supaya ketakvarianan tolok masih laku. Modifikasi ini membawa kewujudan sebutan yang memberikan gandingan daya tolok.

Simetri bagi fungsi gelombang 1-komponen ini diwakili kumpulan simetri U(1). Bagi fungsi gelombang dalam multiplet, operator simetri boleh berbentuk matriks di antara komponen-komponen ini. Misalnya, bagi doublet,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix},$$

transformasi dalaman memberikan $\psi'(x) = U(\alpha)\ \psi(x)$ di mana $U(\alpha)$ merupakan matriks uniter 2x2. Campuran komponen doublet akibat $U(\alpha)$ diparameterkan oleh $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Jika matriks spin Pauli,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

diambil sebagai asas, kita boleh tulis,

$$U(\alpha) = 1 + i\,\boldsymbol{\alpha}\,.\,\boldsymbol{\tau}/2$$

untuk a_1 dan lain-lain infinitesimal, dan

$$U(\alpha) = \exp(\,i\,\boldsymbol{\alpha}\,.\,\boldsymbol{\tau}/2)$$

untuk α_1 dan lain-lain terhad. Dalam kes ini, medan ini punyai simetri dalaman SU(2), dengan $\tau_k/2$ sebagai penjananya. Bagi simetri tempatan, α_k bergantungkan kedudukan dalam ruang, dan kehendak ketakvarianan tolok menghendaki kita perkenalkan medan vektor tertentu, $A^{\mu}{}_{k}(x)$, yang berganding dengan medan asal, yang membawa kepada daya tolok. Ini adalah medan Yang-Mills SU(2).