Simetri dan ketakvarianan memainkan peranan penting dalam pemerihalan medan kuantum. Simetri berkait dengan ketakvarianan – sesuatu simetri menyebabkan sesuatu kuantiti itu takvarian, dan sebaliknya. Pada asasnya, dihipotesiskan bahawa ruang-masa punyai simetri translasi ruang, translasi masa, dan putaran ruang. Ini masing-masing membawa kepada keabadian momentum linear, keabadian tenaga, dan keabadian momentum sudutan. Kemudian, menurut kerelatifan khas, ada simetri terhadap galakan Lorentz. Putaran dan galakan Lorentz diperihalkan oleh kumpulan simetri Lorentz $\mathcal{L}$. Kumpulan simetri Poincare $\mathscr{P}$ pula mengandungi operator-operator kumpulan Lorentz ditambah translasi.

Kumpulan Lorentz

Metrik Minkowski bagi ruang masa ialah

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Ketakvarianan metric ini timbul daripada persamaan Maxwell dalam sebutan $F_{\mu\nu}$:

(1) $F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = j^\mu$
(2) $F_{(\mu\nu,\lambda)} = 0$.

Di sini tatatanda koma menandakan pembedaan, dan kurungan menandakan semua pilihatur kitaran. (2) diselesaikan oleh

$$F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}.$$

"[…]" menandakan pengantisimetrian. Penggantian dalam (1) menghasilkan

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = j^\nu.$$

Kumpulan simetri linear terhadap mana Ini takvarian, merupakan kumpulan Lorentz. Transformasinya berbentuk

$$dx^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu,$$

(dalam bentuk matriks $dx \to \Lambda dx$). Perhatikan metrik

$$ds^2 = dx^\mathrm{T}\, g\, dx$$

dan

$$ds^2 \to dx^\mathrm{T}\, \Lambda^\mathrm{T}\, g\, \Lambda\, dx.$$

Jadi, bagi ds^2 takvarian,

$$\Lambda^\mathrm{T}\, g\, \Lambda = g.$$

Λ ini membentuk suatu kumpulan simetri, iaitu kumpulan Lorentz,

$$\mathcal{L} = \{\Lambda : \Lambda^\mathrm{T} g \Lambda = g\}.$$

Boleh disemak bahawa kehendak-kehendak ciri kumpulan simetri dipuasi: ketertutupan, kesekutuan, dan kewujudan songsangan dan identiti dalam kumpulan.

Secara topologi, unsur-unsur $\mathcal{L}$ adalah selanjar, dan oleh itu $\mathcal{L}$ ialah kumpulan topologian. Syarat ke atas Λ dalam $\mathcal{L}$ merupakan suatu set 10 syarat-syarat, justru Λ punyai 6 parameter bebas.

Setempat, $\mathcal{L}$ isomorf dengan $\Re^6$, garisan nyata dimensi 6, dan dengan itu $\mathcal{L}$ adalah suatu kumpulan Lie. Sejagat, $\mathcal{L}$ tidak bersambung secara lengkok: jika $\Lambda \in \mathcal{L}$, maka det $\Lambda = \pm 1$ (daripada det $(\Lambda^T g \Lambda)$ = det g), yang membabatkan $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-$, iaitu bahagian dengan unsur berdeterminan +1 dan yang berdeterminan -1. Kita tidak boleh mengubah suatu unsur secara selanjaran untuk menyerupai kesemua unsur dalam $\mathcal{L}$ kerana ia terbahagi kepada dua rantau dengan determinan berlainan. Ada satu lagi pembahagian dalam $\mathcal{L}$. Daripada $\Lambda^T g \Lambda = g$ bagi $\Lambda \in \mathcal{L}$, kita dapati bahawa $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$, yakni samada $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ di mana tiada perubahan dalam tanda bagi masa dikenakan, atau $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ di mana masa berubah tanda. Oleh itu, $\mathcal{L} = \{ \mathcal{L}_+^\uparrow, \mathcal{L}_+^\downarrow, \mathcal{L}_-^\uparrow, \mathcal{L}_-^\downarrow\}$ di mana

$\mathcal{L}_+^\uparrow$ mengandungi identiti $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan yang tersambung daripadanya,

$\mathcal{L}_-^\uparrow$ mengandungi operator pariti (P), $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{L}_+^\downarrow$ mengandungi PT (T ialah pembalikan masa), $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, dan

$\mathcal{L}_-^\downarrow$ mengandungi T, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Boleh dibuktikan bahawa $\mathcal{L} \cong SO(3) \times SO(3)$, di mana SO(30 ialah kumpulan simetri hasildarab matriks berortogon 3×3 khas (yakni determinan 1).

Kumpulan Poinkare

Kumpulan Lorentz mengandungi cepatan Lorentz dan putaran, tetapi tidak mengandungi translasi. Menambahkan juga translasi kepada kumpulan Lorentz memberikan kumpulan Poinkare. Transformasi keseluruhan diberikan $x \to \Lambda x + a = (\Lambda, a)x$ dengan $\Lambda^T g \Lambda = g$. Kumpulan Poinkare diberikan

$$\mathcal{P} = \{(\Lambda, a) : \Lambda^T g \Lambda = g,\ a \in \Re^4\}.$$

Kumpulan Lorentz, $\mathcal{L} = \{(\Lambda, 0)\}$, dan kumpulan translasi 4-dimensi, $T_4 = \{(1, a)\}$, merupakan subkumpulan $\mathcal{P}$. Bahkan T_4 ialah subkumpulan swakonjugat, kerana untuk mana-mana $(\Lambda, b) \in \mathcal{P}$, $(\Lambda, b)(1, a)(\Lambda, b)^{-1} = (1, \Lambda a) \in T_4$.

Simetri Poinkare ini memerintah ruang-masa semesta yang diketahui. Oleh itu, supaya fizik tak varian terhadap mana-mana sistem kordinat yang konsisten dalam ruang-masa, ia perlu membabitkan kuantiti-kuantiti yang merupakan skalar terhadap transformasi Poinkare. Lagrangean sistem haruslah hasiltambah skalar-skalar. Ketakvarianan fizik juga bermakna ketakvarianan Hamiltonan sistem terhadap transformasi Poinkare.

Teorem Noether

Ada hubungan dalam di antara sesuatu simetri dengan keabadian sesuatu kuantiti. Ini diberikan oleh Teorem Noether.

Suatu fungsi sembarangan $F(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$ yang bergantung kepada kordinat-kordinat am q_i, momentum berkanunnya p_i, dan masa t, bertransformasi seperti berikut:

$$\delta F = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i\right) + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t.$$

Transformasi ini diparameterkan oleh λ, katakan, di mana

$$\delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial \lambda}\delta\lambda,$$

$$\delta pq_i = \frac{\partial q_i}{\partial \lambda}\delta\lambda, \text{ dan}$$

$$\delta t = \frac{\partial t}{\partial \lambda}\delta\lambda.$$

Definisikan suatu penjana infinitesimal $G(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$ bagi transformasi ini, dengan

$$\delta p_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}\delta\lambda \qquad \text{dan} \qquad \delta q_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}\delta\lambda.$$

G bitara kecuali terhadap tambahan fungsi t. Dengan ini,

$$\delta F = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)\delta\lambda + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t,$$

ataupun

$$\delta F = [F,G]\delta\lambda + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t,$$

di mana $[F,G]$ ialah kurungan Poisson antara F dan G.

Teorem Noether menyebut bahawa simetri sistem mekanikan yang dijana G, yakni ketakvarianan persamaan pergerakannya di bawah transformasi dijana G, mengimplikasikan keabadian penjana infinitesimal G, yakni $dG/dt = 0$. Buktinya datang daripada kefahaman simeri, bahawa transformasi berkaitan tidak mempengaruhi evolusi sistem,

$$\delta \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\delta.$$

Berikut beberapa contoh kegunaan teorem Noether.

Bagi simetri translasi ruang, yang timbul daripada ketiadaan asalan ruang yang istimewa atau kehomogenan ruang, transformasinya ialah translasi ruang dengan momentum linear sebagai penjananya. Keisotropan ruang, iaitu tiada arah ruang yang istimewa, berkait dengan transformasi putaran ruang, dengan momentum sudutan sebagai penjana. Kehomogenan masa, dengan transformasi translasi masa, dijana oleh hamiltonan. Kehomogenan ruang memberikan keabadian momentum linear dan sebaliknya. Begitu juga keisotropan ruang memberikan keabadian momentum sudut dan sebaliknya. Kehomogenan masa sepadan dengan keabadian tenaga jika hamiltonan tiada pergantungan eksplisit terhadap masa.

Kehomogenan ruang menghadkan hamiltonan sistem mengandungi sebutan-sebutan jarak dan bukan kedudukan hakiki. Begitulah keisotropan ruang mengekang kandungan hamiltonan kepada hasildarab titik vektor-vektor dan bukan vektor telanjang yang punyai arah tertentu.

Simetri daripada kehendak bahawa tiada piawaian kepegunan hakiki, atau ketakvarianan Galileoan, yang membabitkan transformasi penukaran rangka inersiaan, berkait penjana $\mathbf{P}t$-$M\mathbf{R}$. $\mathbf{P}$ ialah momentum jumlah, M jisim jumlah, dan $\mathbf{R}$ ialah kedudukan pusat jisim. Dalam sistem berkerelatifan, ketakvarianan Galileoan ini diganti ketakvarianan Lorentz.