

## 7.1 Persamaan Maxwell

Persamaan Maxwell dalam bentuk tensor boleh diberikan oleh

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

dan

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0.$$

Tensor elektromagnet  $F^{\mu\nu}$  memuaskan

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

dan

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu,$$

sementara arus  $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$  dan keupayaan  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ . Medan magnet diberikan  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , dan medan elektrik  $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \dot{\mathbf{A}}$ . (Perhatikan transformasi tolak  $A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \Lambda$  dengan sembarang  $\Lambda$  tidak mengubah  $\mathbf{E}$  dan  $\mathbf{B}$ .) Lihat bahawa  $F^{0k} = -F^{k0} = E^k$  dan  $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$  di mana tensor antisimetri  $\epsilon^{ijk} = +1$  jika  $ijk$  pilihatur kitaran 1,2,3,  $\epsilon^{ijk} = -1$  jika  $ijk$  pilihatur ganjil 1,2,3, dan  $\epsilon^{ijk} = 0$  jika dua indeksnya sama. Guna ini untuk menunjukkan persamaan di atas betul-betul memberikan persamaan Maxwell asal. Lihat juga bahawa, daripada persamaan pertama, dan akibat keantisimetrian tensor elektromagnet,  $\partial_{[\mu} j^{\mu]} = 0$  diperolehi, iaitu persamaan keselantaran.

$F^{\mu\nu}$  mempamerkan ketakvarianan tolak. Transformasi tolak  $A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \Lambda$  menjadikan  $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = F^{\mu\nu} - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda + \partial^\mu \partial^\nu \Lambda = F^{\mu\nu}$ , takvarian.

Untuk pengiraan praktik, kelonggaran tolak biasanya ditetapkan dengan suatu pilihan tolak, misalnya tolak Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , atau tolak Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

Semak juga bahawa persamaan-persamaan Maxwell ini takvarian terhadap transformasi Lorentz diparameterkan oleh  $\Lambda$ ,

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x).$$

## 7.2 Persamaan Dirac

Persamaan Dirac menjadi asas bagi elektrodinamik kuantum. Ia memerihalkan telatah spinor-spinor yang dikaitkan dengan keadaan elektron. Dengan memaksakan ketakvarianan tolak, sebutan salingtindak elektron-foton muncul dalam pemerihalan elektrodinamik kuantum. Persamaan Dirac berasaskan kerangka yang diperlukan untuk memerihal zarah keunsuran – iaitu keadaan berkerelatifan, dan fenomena kuantum.

Persamaan Dirac untuk fermion seperti elektron ialah

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u = 0.$$

Matriks-matriks 4x4 Dirac memuaskan

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \mathbf{1}.$$

Banyak perwakilan yang memuaskan ini wujud, dan boleh dihubungkan menerusi  $\gamma'^\mu = S^{-1} \gamma^\mu S$  dengan  $S$  tak singular. Untuk kemudahan, didefinisikan juga  $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ . Perhatikan bahawa  $(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}$  dan  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \mathbf{0}$ .

Persamaan Dirac seharusnya menghormati ketakvarianan Lorentz. Kalau  $\Lambda$  ialah transformasi Lorentz, maka  $\gamma'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu}$  memuaskan hubungan pengantikomutan untuk  $\gamma$ , maka

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} = S^{-1}(\Lambda) \gamma^{\mu} S(\Lambda).$$

Transformasi Lorentz infinitesimal ditulis  $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}_{\nu}$ , di mana  $\delta^{\mu}_{\nu}$  ialah delta Kronecker, sementara  $\epsilon^{\mu}_{\nu}$  kecil infinitesimal. Oleh kerana kekecilan ini, kita boleh tulis

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{1}{2} i \epsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu}.$$

Perhatikan bahawa  $g_{\kappa\lambda} \Lambda^{\kappa}_{\mu} \Lambda^{\lambda}_{\nu} = g_{\mu\nu}$ , maka  $\epsilon_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu} = 0$ . Oleh itu,  $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$ .

Persamaan Dirac harus menghormati simetri Lorentz. Dari persamaan Dirac,

$$i(\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi = 0,$$

persamaan konjugatnya diberikan oleh

$$-i \partial_{\mu} \psi^{\dagger} \gamma^{\mu\dagger} - m \psi^{\dagger} = 0.$$

### 7.3 Ketakvarianan tolak

Perhatikan bahawa kebarangkalian atau arus tak berubah apabila perubahan sudut fasa  $\theta$  dikenakan kepada  $\psi$ ,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \psi(x).$$

Ini memang dihormati oleh Hamiltonan Dirac bagi elektron bebas,  $\bar{\psi}(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m)\psi$ . Namun kehendak yang lebih ketat ialah ketakvarianan tolak *tempatan*, di mana

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \psi(x).$$

Operator  $\partial_{\mu}$ , yang membawa kepada  $\bar{\psi} \partial_{\mu} \psi$  tidak takvarian terhadap transformasi tolak tempatan ini, digantikan dengan  $D_{\mu}$  yang perlu bertransformasi sedemikian:

$$D_{\mu}(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} D_{\mu}(x).$$

Ini berlaku jika, seperti gandingan minimum dalam elektromagnetan klasik  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ , sebutan salingtindak dengan medan  $A_{\mu}$  dimasukkan, dan  $A_{\mu}$  punyai telatah transformasi tolak biasa untuknya,

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) - \frac{1}{e} \partial_{\mu} \theta(x).$$

Lihat

$$\begin{aligned} D_{\mu} \psi &= \partial_{\mu} \psi + ie A_{\mu} \psi \rightarrow e^{i\theta} \partial_{\mu} \psi + ie^{i\theta} \partial_{\mu} \theta + ie(A_{\mu} - \frac{1}{e} \partial_{\mu} \theta)(e^{i\theta} \psi) \\ &= e^{i\theta} (\partial_{\mu} \psi + ie A_{\mu} \psi) \end{aligned}$$

$$= e^{i\theta} D_\mu \psi.$$

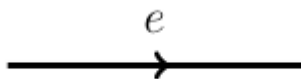
Jadi, Hamiltonian takvarian tolok tempatan ialah  $\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$ . Dikembangkan, ini memberi  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ . Sebutan pertama dikaitkan dengan tenaga kinetik elektron, sementara yang kedua ialah tenaga daripada jisim elektron. Kehendak ketakvarianan tolok telah memerlukan dan secocok dengan gandingan minimum, yang menimbulkan sebutan ketiga, yang merupakan sebutan gandingan  $\psi$  dengan medan  $A_\mu$ . Medan ini merupakan apa yang dikatakan medan tolok. Lihat bahawa gandingan ini dimoderasikan oleh kekuatan  $e$ .

## 7.4 Gambarajah Feynman

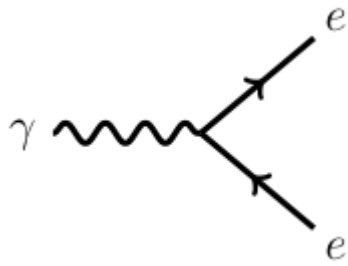
Dalam gambaran Feynman terhadap mekanik kuantum, amplitud kuantum sesuatu proses itu merupakan hasil tambah daripada sebutan-sebutan dari jejak kuantum berlainan. Bagi keadaan awal yang tertentu dengan keadaan akhir yang tertentu, jejak di antara kedua-dua keadaan ini boleh mengambil apa-apa bentuk asalkan dua keadaan ini tetap. Di antara keadaan awal dan keadaan akhir yang tertentu itu, apa-apa jejak diharuskan. Bukan sahaja dari segi trajektori zarah-zarah berkenaan, tetapi kelainan bilangan dan jenis zarah yang terbabit juga dibenarkan, asalkan bilangan dan jenis di awal dan akhir tidak diubah. Zarah boleh muncul dan hilang. Yakni gambarajah tindakbalas dengan bilangan verteks salingtindak berlainan boleh dimasukkan.

Feynman telah mensistemkan pengiraan amplitud kuantum sesuatu proses menerusi gambarajah Feynman dan peraturan Feynman. Gambarajah Feynman yang asas mewakili sesuatu sebutan asas daripada Hamiltonan atau Langrangean, dan gambarajah yang lebih tinggi dibina dengan menyambung gambarajah-gambarajah. Bagi elektrodinamik, yang membabitkan zarah jirim (fermion) bercas, foton (medan elektromagnet), dan saling-tindak di antaranya, gambarajah-gambarajah asas sepadan dengan sebutan-sebutan dalam Hamiltonan Dirac, ditambah sebutan untuk tenaga (kinetik) foton. Sebutan ini ialah  $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , yang memberikan  $\frac{1}{2}(E^2 + B^2)$ , sepadan dengan tenaga medan elektromagnet.

Jadi ada tiga sebutan asas untuk elektrodinamik kuantum: satu untuk tenaga elektron bebas,  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ , satu untuk saling-tindak foton-elektron,  $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ , dan satu untuk tenaga foton bebas,  $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ . Gambarajah asas bagi sebutan ini adalah seperti berikut (paksi masa mengufuk);



elektron bebas

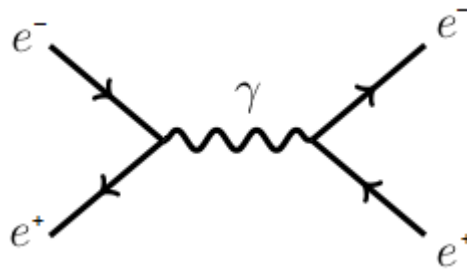


salingtindak elektron-foton

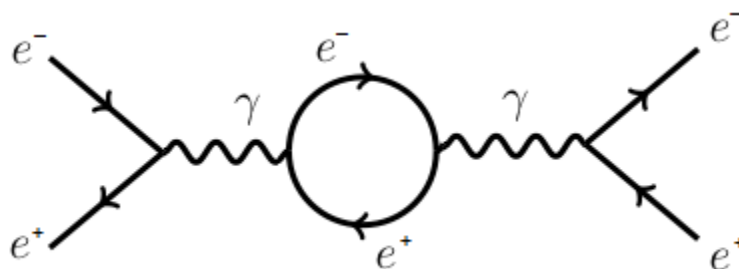


foton bebas

Gambarajah yang lebih besar dibina dengan menyambung gambarajah-gambarajah ini. Yang penting ialah keadaan awal dan keadaan akhir ialah seperti yang dikehendaki. Misalnya, tindak balas  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  boleh berlaku seperti diberikan gambarajah ini:



Dalam gambarajah ini, masa berarah mengufuk ke kanan. Garis dengan panah menurut masa ialah zarah, sementara yang melawan masa ialah antizarah. Panah harus berterusan. Bagi keadaan awal dan akhir seperti diberikan, ada gambarajah lain yang menyumbang, misalnya

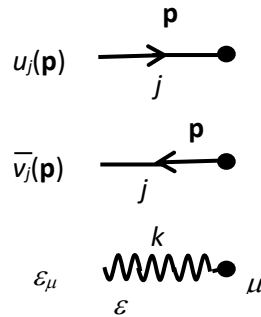


Bagi mengira amplitud tindakbalas, gambarajah-gambarajah sah disenaraikan, dan kemudian kiraan dibuat, menurut peraturan Feynman.

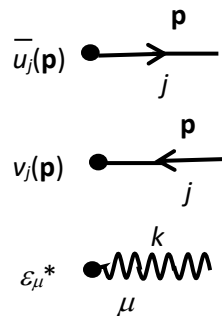
### 7.5 Peraturan Feynman

Kaedah mengira amplitud tindakbalas diberi oleh peraturan Feynman. Berikut ialah peraturan Feynman untuk salingtindak elektromagnetan, yang menjadi asas kepada teori medan kuantum untuk salingtindak elektromagnetan, digelar Elektrodinamik Kuantum (QED).

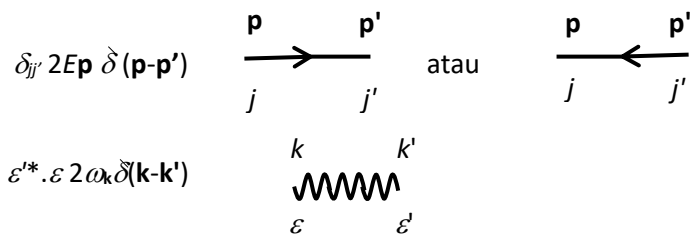
1. Lukiskan semua gambarajah dgn  $n$  bucu (bagi usikan peringkat  $n$ ) dgn garisan-garisan masuk dan keluar (garisan-garisan *luar*) yg sepadan dgn keadaan mula dan akhir.
2. Labelkan semua garisan dalam dgn momentum-momentum. Labelkan bucu-bucu dgn  $\mu, \nu, \dots$
3. Masukkan faktor-faktor:
  - i) garisan-garisan masuk; elektron, antielektron dan foton



- ii) garisan-garisan keluar

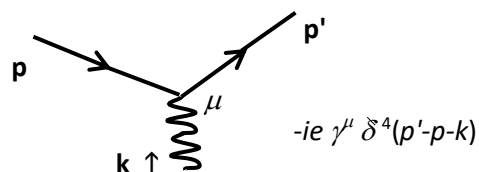


- iii) garisan-garisan lalu terus



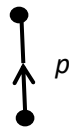
di mana  $\delta = \frac{\delta}{2\pi}$ .

- iv) bucu-bucu

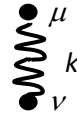


dengan fungsi delta bagi memaksa keabadian tenaga-momentum

v) garisan-garisan dalam



$$\frac{i}{\not{p}-m+i0}$$



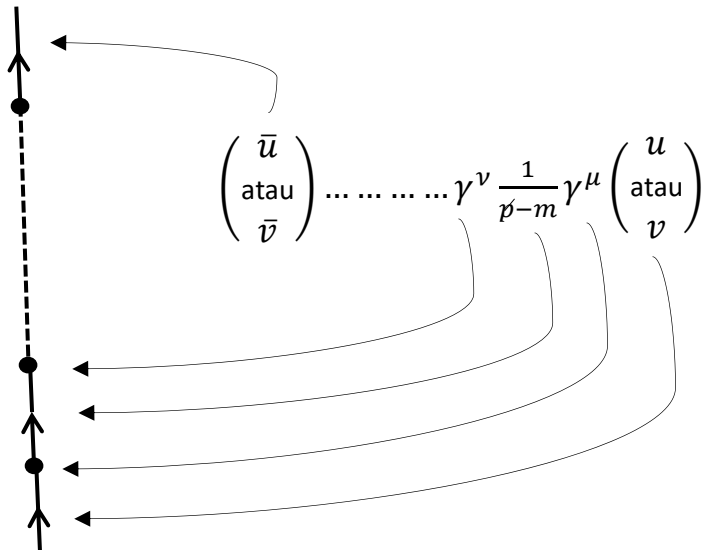
$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i0}$$

di mana  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$  (dengan kelaziman hasil tambah bagi indeks berulang) dan  $+i0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} +i\epsilon$ ,

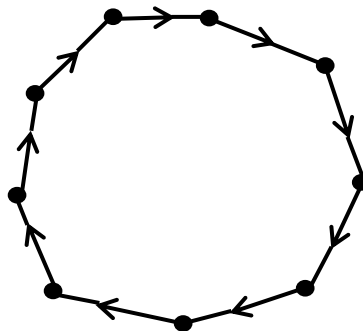
dan kamirkan  $\int \vec{d}^4 p$  atau  $\int \vec{d}^4 k$ , di mana  $\vec{d} = \frac{d}{2\pi}$

vi) aturan faktor-faktor matriks

ikut anak panah dlm setiap lintasan – faktor dari kanan ke kiri

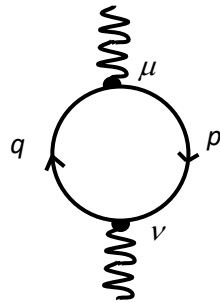


vii) gelung tertutup



$(-1) \text{tr} [\dots\dots\dots]$  bermula dari mana-mana di gelung  
(tr – surihan)

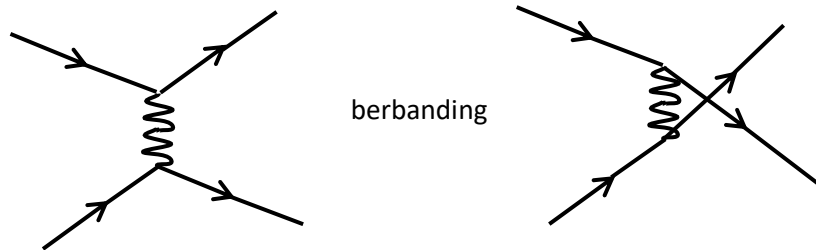
misalnya,



$$\sim (-1) \text{tr} \left[ \gamma^\mu \frac{1}{q-m} \gamma^\nu \frac{1}{p-m} \right]$$

viii) faktor bertanda negatif membezakan gambarajah dengan pilihatur relatif yang berlainan terhadap lintasan-lintasan elektron masuk dan keluar

misalnya,

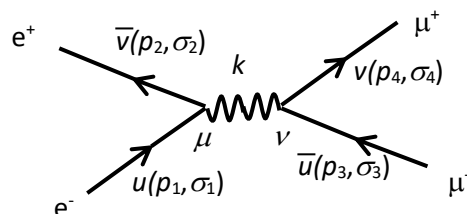


mesti ada tanda negatif secara relative (statistik Fermi)

Peraturan Feynman untuk Elektrodinamik Kuantum

### 7.6 Beberapa tindakbalas

Mari kita lihat beberapa contoh penggunaan peraturan Feynman untuk mengira amplitud tindakbalas. Proses paling mudah pada peringkat terendah (yang hanya babitkan gambarajah pepohon) ialah proses  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Hanya ada satu gambarajah Feynman pada peringkat ini:



di mana  $p$  mewakili 4-momentum dan  $s$  mewakili spin zarah-zarah berkenaan. Menurut peraturan Feynman, gambarajah ini memberikan amplitud

$$[\bar{u}(p_3, \sigma_3)(ie\gamma^\nu)v(p_4, \sigma_4)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2} [\bar{v}(p_2, \sigma_2)(ie\gamma^\mu)u(p_1, \sigma_1)].$$

Kamiran terhadap  $k$  dalam pembawa perambat, menghasilkan terma  $(p_1+p_2)^2$  kerana  $\delta(p_1+p_2-k)$ . Menggunakan  $u_1$  bagi mewakili  $u(p_1, \sigma_1)$ , dan sebagainya, amplitud ini ialah

$$\frac{e^2}{(p_1+p_2)^2} (\bar{u}_3 \gamma_\mu v_4) (\bar{v}_2 \gamma^\mu u_1).$$

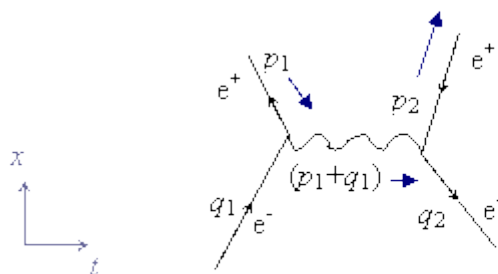
Kadar tindakbalas diberi menggunakan kebarangkaliannya, yang diperolehi daripada kuasadua amplitud. Kalau elektron dan positron masukan tidak terketub, kita perlu mengambil purata terhadap semua keadaan spin masukan. Keratan rentas pembedaan,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A|^2 = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta).$$

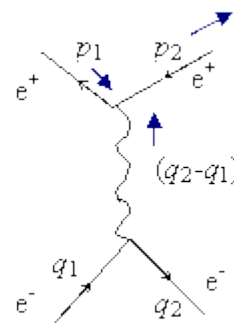
Di sini,  $\sigma$  adalah keratan rentas,  $\Omega$  sudut pepejal,  $A$  amplitud,  $\alpha$  pemalar struktur halus, yang berkadaran  $e^2$ ,  $s$  adalah kuasadua tenaga pusat jisim, sementara  $\theta$  ialah sudut serakan. Bila dikamir terhadap arah, keratan rentas jumlah,

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}.$$

Serakan Bhabha ialah tindakbalas  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ . Jika momentum elektron dan positron awal ialah masing-masing  $q_1$  dan  $p_1$ , dan bagi elektron dan positron akhir  $q_2$  dan  $p_2$ , maka pada peringkat terendah ada dua gambarajah Feynman:

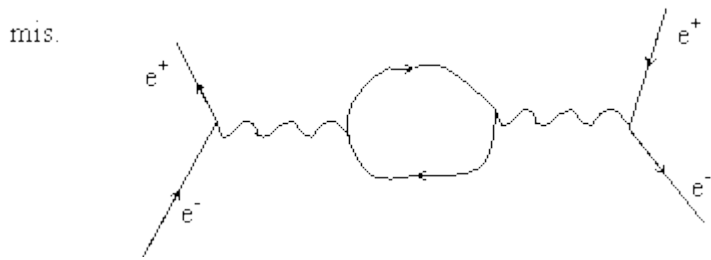


gambarajah musnahabis saluran-s foton maya seperti-masa (jisim<sup>2</sup> +f)



gambarajah periferi saluran-t foton maya seperti-ruang (jisim<sup>2</sup> -f)

sementara pada peringkat lebih tinggi, ada gambarajah yang mungkin membabitkan gelung,



Pada peringkat terendah (peringkat pepohon), amplitud proses ini ialah



$$-e^2[\bar{v}(p_1)\gamma^\mu v(p_2)]\frac{1}{(p_1-p_2)^2}[\bar{u}(q_2)\gamma_\mu u(q_1)] + e^2[\bar{v}(p_1)\gamma^\nu u(q_1)]\frac{1}{(p_1+q_1)^2}[\bar{u}(q_2)\gamma_\nu v(p_2)].$$

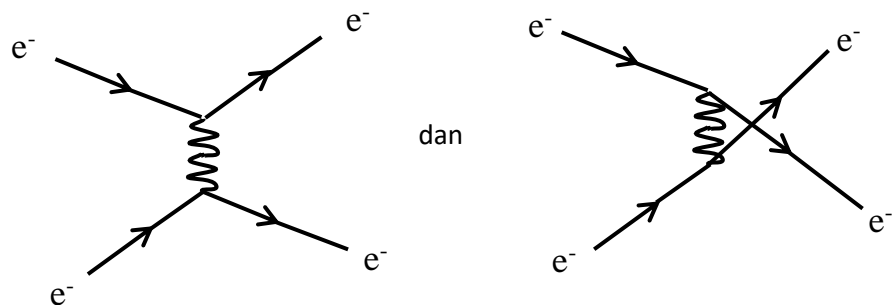
Dalam kes ini, penguasaduaan bagi menghasilkan kadar memberikan sebutan berkait musnahabis dan sebutan berkait periferi, dan juga dua sebutan interferens kedua-duanya. Memuratakan terhadap spin, dan seterusnya, memberikan

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \left( u^2 \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 + \left( \frac{t}{s} \right)^2 + \left( \frac{s}{t} \right)^2 \right)$$

di mana  $s$ ,  $t$  dan  $u$  adalah pembolehubah-pembolehubah Mandelstam:  $s=(p_1+q_1)^2=(p_2+q_2)^2$  (tenaga pusat jisim kuasa dua),  $t=(p_1-p_2)^2=(q_1-q_2)^2$  dan  $u=(q_1-p_2)^2=(p_1-q_2)^2$ .

Secara eksperimen, perlanggaran elektron-positron dilakukan pemecut linear seperti di Stanford Linear Accelerator Collider (SLAC) yg panjang 2 km, di Amerika Syarikat, atau di 'gelang simpanan', iaitu gelang-gelang magnet yang menyimpan alur-alur zarah bercas dalam trajektori membulat, seperti di PETRA (1970an-1980an) di DESY, Jerman, dan di PEP (1980an) dan KEK (2000an) di Tsukuba, Jepun. Pemecut memecut zarah bercas ke halaju tinggi menggunakan medan elektrik. Pelanggaran zarah-zarah dengan halaju bertentangan dapat memperolehi tenaga pusat jisim yang lebih besar berbanding perlanggaran oleh satu bim ke atas sasaran tetap.

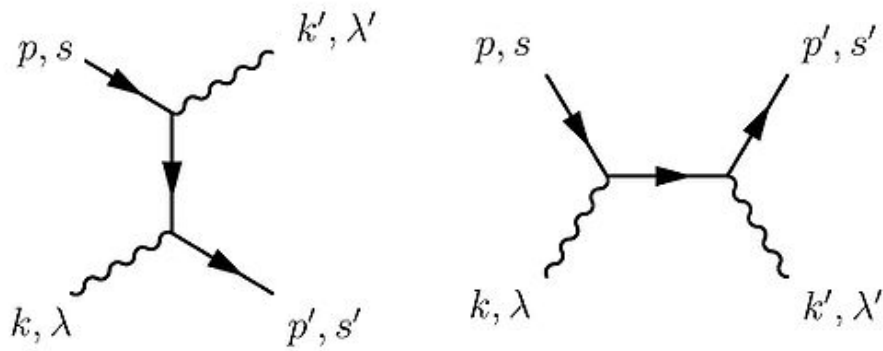
Serakan Møller pula ialah proses  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ . Pada peringkat pepohon dalam Elektrodinamik Kuantum, hanya ada proses saluran- $t$ , tapi ada dua gambarajah, akibat kemungkinan tukarganti:



Menyilang, iaitu menukar suatu zarah masukan kepada antizarahnya keluaran dengan negatif momentumnya, atau dari keluaran ke masukan, tidak mengubah nilai amplitud. Oleh itu, amplitudnya sama seperti untuk serakan Bhabha. Yang menakjubkan, gantirugi bagi sebutan tambahan tindakbalas saluran- $s$  untuk Bhabha, disediakan oleh gambarajah tambahan tukarganti elektron keluaran untuk Møller. Bagi elektron masuk dengan momentum  $p_1$  dan  $p_2$ , dan elektron keluar dengan momentum  $p_3$  dan  $p_4$ , amplitud peringkat terendah diberikan

$$-\frac{e}{(p_1-p_3)^2}[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)][\bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)] + \frac{e}{(p_1-p_4)^2}[\bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_1)][\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_2)].$$

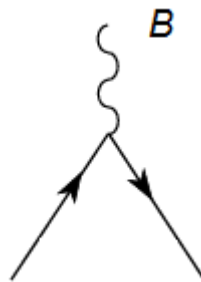
Dalam perihalan elektrodinamik kuantum, serakan Compton,  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$ , mempunyai 2 gambarajah peringkat pertama,



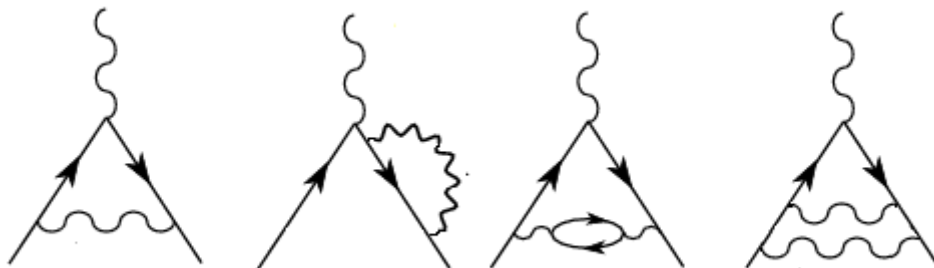
Begitu juga, ukuran momen magnet janggal bagi elektron boleh dwakili gambarajah Feynman. Momen magnet diberi

$$\boldsymbol{\mu} = g_s \mu_B \mathbf{S}$$

dengan faktor  $g_s=2$  biasanya,  $\mu_B$  sebagai pemalar dikenali magneton Bohr, dan  $\mathbf{S}$  spin. Gambarajah peringkat pertama ialah



sementara ada banyak sebutan peringkat lebih tinggi, misalnya,



yang menyumbang kepada ramalan teorion yang lebih jitu. Kiraan elektrodinamik kuantum memberikan nilai  $g_s = 2.00233169439$  bagi muon, sementara eksperimen dalam tahun 2000an mendapati nilainya  $2.00233184182 \pm 0.0000000127$ . Ini menunjukkan persetujuan kepada 7 digit bererti, walaupun kesan (kecil) daripada daya lemah belum dimasukkan. Ini merupakan satu bukti yang kuat yang menyokong teori medan kuantum.

